-0-

CORSO DI "ELEMENTI DI MATEMATICA" DEL CORSO DI LAUREA IN FARMACIA

PARTE 1

|| (È UGUALE AL CORSO PROPEDEUTICO DI MATEMATICA)

Matematica ... che passione!

Perché un corso di Matematica?

1) Studio dei FENOMENI da diverse branche delle scienze (Fisica, Chimica, Biologia...) e costruzione di MODELLI MATEMATICI che servono per cogliere gli elementi essenziali del fenomeno, fare una sintesi e studiare le principali proprietà
[Quindi abbiamo le funzioni, che descriveranno i fenomeni, e per studiare le proprietà principali si introducono i concetti di limite, derivata, integrale]
Così le funzioni possono essere studiate.
Esempi di funzioni: in Fisica, abbiamo la velocità e l'accelerazione di un punto materiale lungo una traiettoria rettilinea.

2) Fare molti ESPERIMENTI su molti dati che si hanno a disposizione, sapere RAGGRUPPARE i dati,

e studiare le principali proprietà di questi dati in modo tale che, dall'analisi sperimentale, si riesce a dedurre che questi dati in realtà esprimono delle leggi, degli andamenti significativi su fenomeni medico/scientifici e si riesce a interpretare, ad esempio, l'evoluzione di determinate malattie, se un test è attendibile, e se una certa variazione di dati è frutto del caso oppure no.
[Quindi abbiamo anche il Calcolo delle Probabilità e la Statistica]

3) Vedere quello che ci sta "dietro" le formule, quindi I CONCETTI.

4) La Matematica è un'Arte, come la Scultura, la Musica (τέχνη (tèchne), TECNICA modellare l'argilla: questo vuol dire "acquisire strumenti di calcolo")

5) (SCOPO) TRASMISSIONE DELLA CONOSCENZA che dovete essere anche voi (a vostra volta) capaci di fare:

NO NOZIONISMO, NO FORMULE A MEMORIA...

TRIGONOMETRIA

(Misura degli angoli, studio delle proprietà fondamentali dei triangoli, ...)

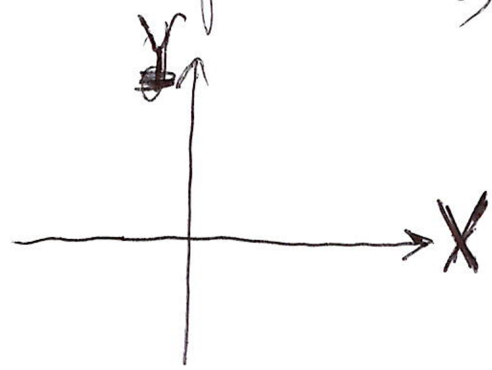
È una scienza antichissima, con moltissime applicazioni.

A CHE COSA SERVE? PER ESEMPIO:

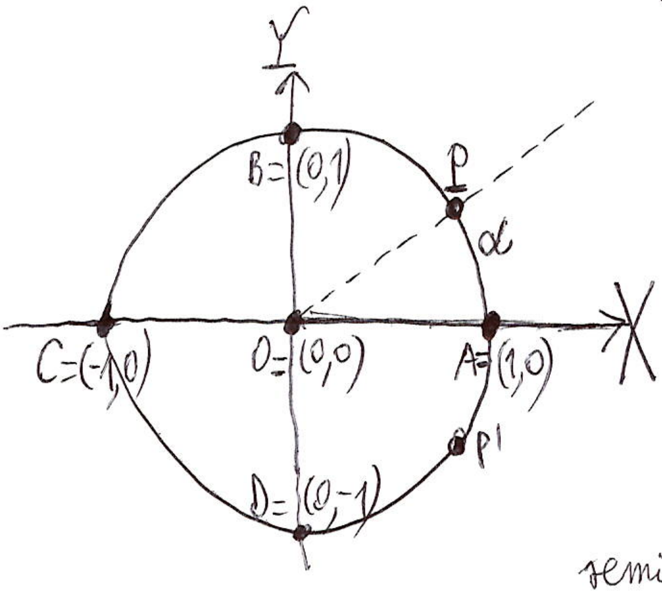
1) Calcolare l' altezza di monumenti senza arrampicarsi
2) Calcolare la distanza fra due punti inaccessibili, e anche le distanze astronomiche, per esempio Terra - Luna, Terra - Sole, la distanza tra il Sole e una stella.....
3) Svariatissime applicazioni in Fisica (p. es. pendolo, moto armonico...) e in altre rami delle Scienze.......

Parleremo degli angoli, e delle cosiddette "funzioni trigonometriche" (seno, coseno, tangente, cotangente di un angolo...)

Come prima cosa, consideriamo il <u>piano cartesiano</u>



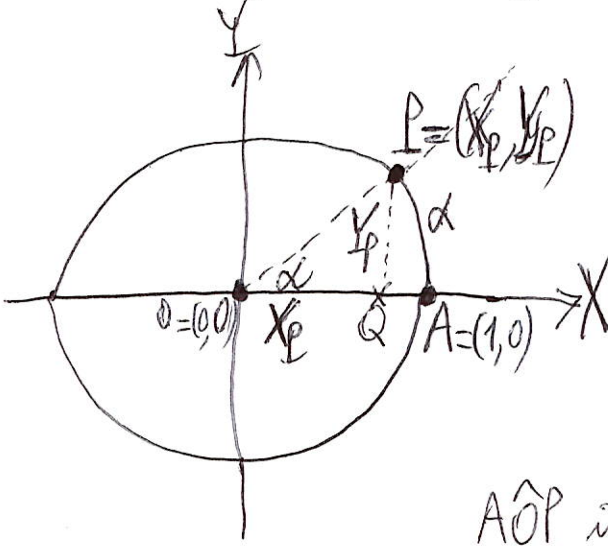
e poi disegniamo la <u>CIRCONFERENZA GONIOMETRICA</u>, cioè la circonferenza di centro l'origine degli assi cartesiani $O=(0,0)$ e raggio 1, cioè il luogo geometrico di tutti i punti P del piano cartesiano tali che la distanza $\overline{OP}$ dall'origine è uguale a 1 (Questa distanza OP è proprio il RAGGIO della nostra circonferenza).



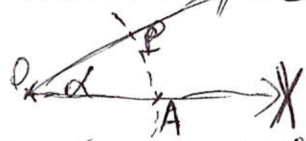
Adesso consideriamo la semiretta OP (prolungando il segmento OP "dalla parte di P") e il semiasse positivo delle X.

Ad ogni punto P della circonferenza goniometrica associamo la lunghezza α dell'arco di circonferenza $\overset{\frown}{AP}$ che ha come primo estremo il punto $A=(1,0)$ e come secondo estremo il punto P, e in cui LA CIRCONFERENZA VIENE PERCORSA IN SENSO <u>ANTIORARIO</u>.

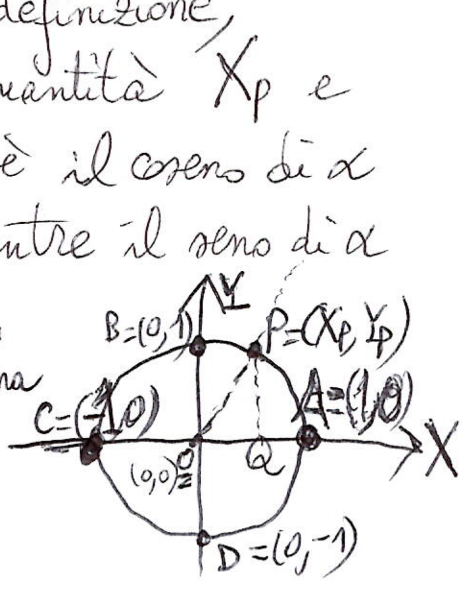
Esempio: Se consideriamo il punto P', come arco $\overset{\frown}{AP'}$ non prenderemo il "cammino più breve" da A a P' (altrimenti la "circonferenza sarebbe percorsa in senso orario), ma il cammino "lungo" che parte da A, passa per i punti B, C e D, e arriva a P'.



Quindi ad ogni punto P della circonferenza goniometrica associamo la lunghezza α dell'arco di circonferenza $\widehat{AP}$ come abbiamo detto nella pagina precedente. L'<u>angolo</u> $A\hat{O}P$ in figura (determinato dal semiasse positivo delle X e dalla semiretta OP "dalla parte di P") sarà <u>identificato</u> con la lunghezza α dell'arco $\widehat{AP}$ e sarà indicato sempre con la lettera α. I nostri angoli PARTIRANNO SEMPRE DAL SEMIASSE POSITIVO DELLE X



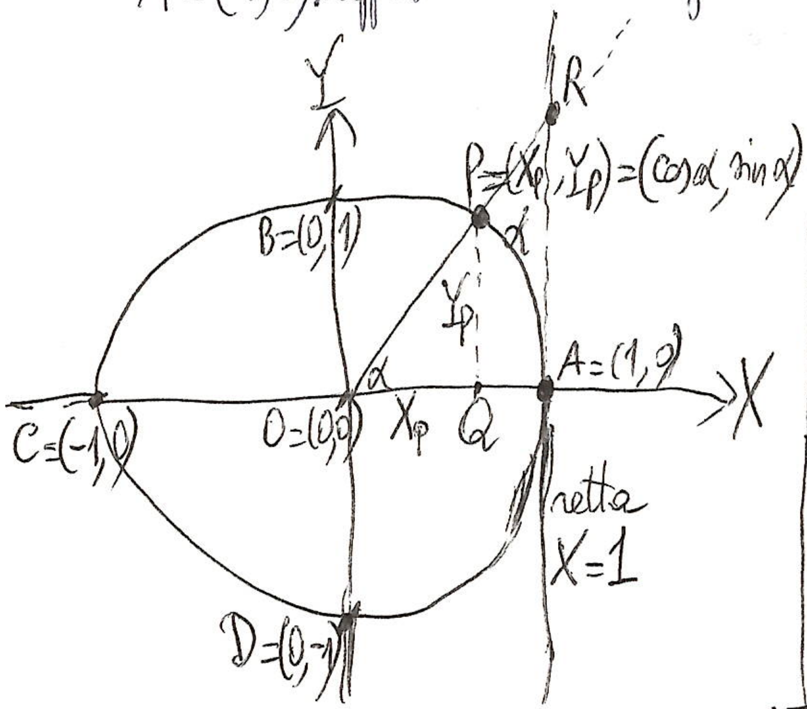
e, siccome sono "costruiti" su due semirette (una delle quali - per l'appunto - è il semiasse positivo delle X), possiamo sempre considerare il punto di intersezione P tra la <u>seconda semiretta</u> e la circonferenza goniometrica. Il punto P, naturalmente, fa parte del piano cartesiano e quindi avrà la sua ascissa X_P e la sua ordinata Y_P. Per definizione, chiameremo <u>coseno</u> di α ($\cos\alpha$) la quantità X_P e <u>seno</u> di α ($\sin\alpha$) la quantità Y_P, cioè il coseno di α sarà la lunghezza del segmento OQ, mentre il seno di α sarà la lunghezza del segmento QP.



Se $X_P \neq 0$, cioè se $P \neq B=(0,1)$ e $P \neq D(0,-1)$, si chiama <u>tangente</u> di α ($tg\,\alpha$ oppure $\tan\alpha$) la quantità $\boxed{\dfrac{Y_P}{X_P}}$,

cioè $tg\,\alpha = \tan\alpha = \boxed{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{QP}{OQ}$.

Sia R il punto che si ottiene prolungando la semiretta OP dalla parte di P e facendo l'intersezione di questa semiretta con la retta $X=1$ cioè con la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto $A=(1,0)$. Rappresentiamo la tangente con ~~un~~ UNICO SEGMENTO.

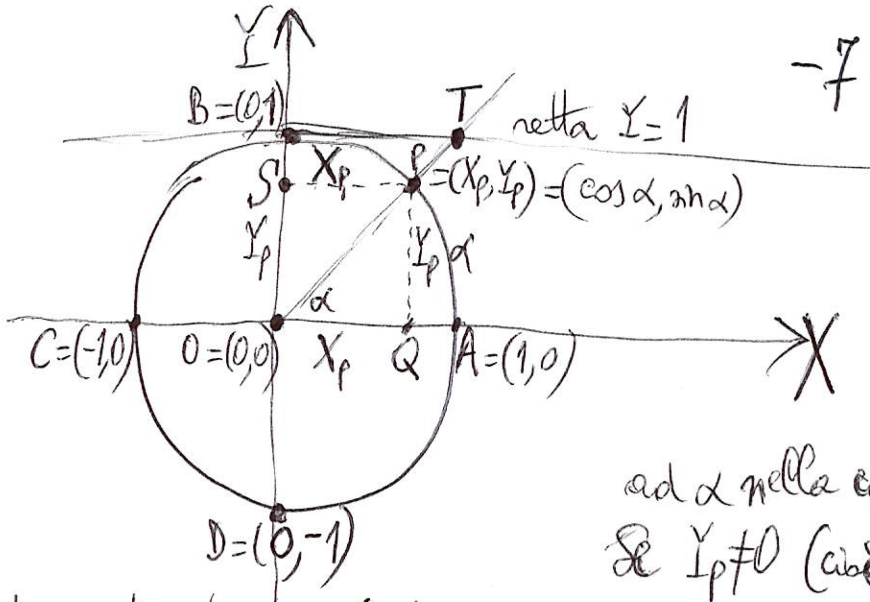


Dimostriamo che $tg\,\alpha = \overline{AR}$.

I triangoli OQP e OAR hanno gli angoli uguali; infatti gli angoli $P\hat{O}Q$ e $R\hat{O}A$ sono uguali ad α, gli angoli $P\hat{Q}O$ e $R\hat{A}O$ sono uguali perché sono retti. Se due triangoli hanno due angoli uguali, allora hanno <u>tutti e tre</u> gli angoli uguali, perché la somma degli angoli di ogni triangolo è sempre costante [(più precisamente, è uguale sempre all'angolo associato alla lunghezza dell'arco $\widehat{AC}$, cioè della <u>semicirconferenza</u>, e sarà espresso da π, perché la lunghezza della circonferenza di raggio R è $2\pi R$, quindi la lunghezza della circonferenza di raggio 1 è 2π, e allora la lunghezza della semicirconferenza di raggio 1 è π; come vedremo in seguito, π corrisponde a 180° (180 gradi), cioè all' "angolo piatto")].

Quindi i triangoli OQP e OAR hanno tutti e tre gli angoli uguali; dunque sono <u>SIMILI</u>, e quindi hanno le lunghezze dei rispettivi lati IN PROPORZIONE. In particolare, $\frac{QP}{OQ} = \frac{AR}{OA} = AR$, in quanto la lunghezza $OA=1$, perché <u>RAGGIO</u> della circonferenza goniometrica. Allora $AR = \frac{QP}{OQ} = \frac{Y_P}{X_P} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha = \tan\alpha$.

Quindi la tangente dell'angolo α è espressa dalla lunghezza del segmento AR, come volevamo dimostrare.



Definiamo ora la <u>cotangente</u> di un angolo α. Sia P il punto che "corrisponde" ad α nella circonferenza goniometrica. Se $Y_P \neq 0$ (cioè se $P \neq A$ e $P \neq C$), si chiama <u>cotangente</u> di α ($\cot g\,\alpha$ oppure $\cot an\,\alpha$) la quantità $\frac{X_P}{Y_P} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Notiamo che, se P è diverso da A, B, C, D, cioè se $X_P \neq 0$ ed $Y_P \neq 0$, cioè se esistono <u>sia</u> la tangente <u>che</u> la cotangente, si ha:

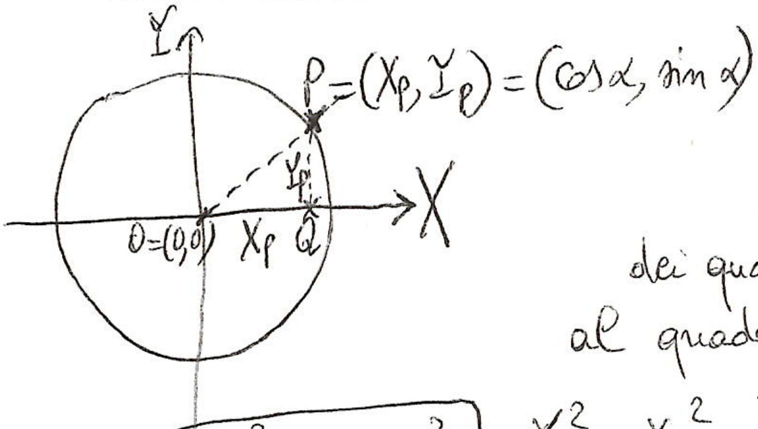
$$\cot g\,\alpha = \frac{X_P}{Y_P} = \frac{1}{\frac{Y_P}{X_P}} = \frac{1}{tg\,\alpha}\ ;\ tg\,\alpha = \frac{Y_P}{X_P} = \frac{1}{\frac{X_P}{Y_P}} = \frac{1}{\cot g\,\alpha}$$

Quindi la tangente e la cotangente, <u>se</u> esistono entrambe, sono una la <u>RECIPROCA</u> dell'altra. Proviamo che $\cot g\,\alpha$ è uguale alla lunghezza del segmento $\boxed{BT}$ in figura, ove T si ottiene <u>prolungando</u> la semiretta OP dalla parte di P e facendo l'intersezione di questa semiretta con la retta $Y=1$, cioè con la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto $B=(0,1)$. Infatti, consideriamo i triangoli OSP e OBT: questi due triangoli, per costruzione, hanno uguali gli angoli $S\hat{O}P$ e $B\hat{O}T$, e inoltre anche gli angoli $O\hat{S}P$ e $O\hat{B}T$ sono uguali, perché sono retti. Allora i due triangoli hanno due angoli uguali e, procedendo analogamente come quando abbiamo visto la funzione tangente, tutti i tre angoli saranno uguali, quindi i due triangoli sono <u>SIMILI</u>, e quindi hanno le lunghezze dei rispettivi lati IN PROPORZIONE. In particolare, $BT = \frac{BT}{1} = \frac{BT}{OB} = \frac{SP}{OS}$ (perché i triangoli OBT e OSP sono simili) $= \frac{X_P}{Y_P} = \cot g\,\alpha = \cot an\,\alpha$, come volevamo dimostrare.

Ora dimostriamo la seguente

IDENTITÀ FONDAMENTALE Per ogni angolo α, si ha

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$



Questa è una conseguenza del teorema di PITAGORA, che afferma che in ogni triangolo rettangolo la somma dei quadrati costruiti sui cateti è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa.

Si ha: $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = Y_P^2 + X_P^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{OP}^2$ (per il teorema di Pitagora) $= \boxed{1}$ (perché OP è il raggio della circonferenza goniometrica).

Analogamente si dimostra il seguente

TEOREMA: L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA È $\boxed{X^2 + Y^2 = 1}$

Sia infatti P un qualunque punto della circonferenza goniometrica. La sua ascissa X sarà uguale ad X_P, e la sua ordinata Y sarà uguale ad Y_P. Si ha, procedendo come nell'identità fondamentale:

$\boxed{X^2 + Y^2} = X_P^2 + Y_P^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2 = \boxed{1}$, come si voleva dimostrare.

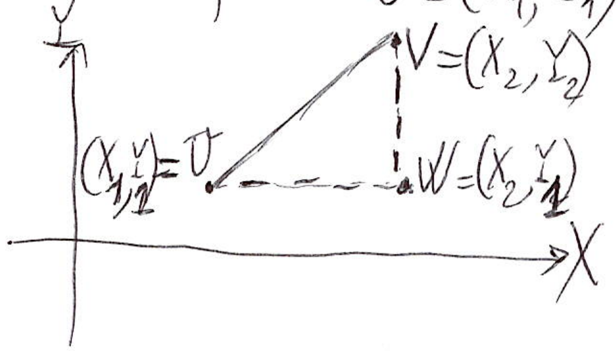
Ora, prima di dare esempi, esercizi, ..., daremo un'altra formula fondamentale (FORMULA DI SOTTRAZIONE DEL COSENO): sostanzialmente, pressoché TUTTA la trigonometria si poggia su questa formula e formule analoghe a questa, e su quanto abbiamo detto finora.

FORMULA DI SOTTRAZIONE DEL COSENO

Comunque si prendano due angoli α e β, si ha

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

Prima di tutto, dimostriamo come si calcola la distanza tra due punti $U=(X_1, Y_1)$ e $V=(X_2, Y_2)$



Notiamo che $WV = Y_2 - Y_1$, $UW = X_2 - X_1$. Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo UVW, rettangolo in W, si ha:

$$(*)\quad \overline{UV}^2 = \overline{UW}^2 + \overline{WV}^2 = (X_2-X_1)^2 + (Y_2-Y_1)^2, \text{ e quindi}$$

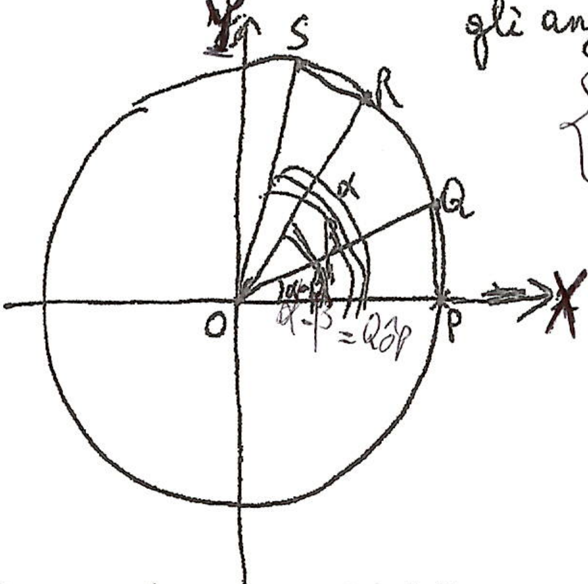
$$\overline{UV} = \sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2}$$

Quindi la distanza tra i due punti U e W è data dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze delle coordinate omonime dei due punti.

Dimostriamo ora la formula di sottrazione del coseno:

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

Disegniamo la circonferenza goniometrica e consideriamo gli angoli



$$\begin{cases} S\hat{O}P = \alpha \quad R\hat{O}P = \beta \\ Q\hat{O}P = \alpha-\beta \end{cases}$$

Le coordinate dei punti S, R, Q, P sono rispettivamente

$S = (\cos\alpha, \sin\alpha)$
$R = (\cos\beta, \sin\beta)$
$Q = (\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$
$P = (1, 0)$

I triangoli ORS ed OPQ sono uguali (congruenti), in quanto hanno due lati uguali (OS ed OQ sono due raggi, come pure OR ed OP) e un angolo uguale (infatti l'angolo compreso fra OS e OR è $\alpha-\beta$, come pure l'angolo compreso fra OQ e OP). Quindi, in particolare, $\overline{SR} = \overline{QP}$, e pertanto $\overline{SR}^2 = \overline{QP}^2$. Applicando la formula (*) del quadrato della distanza di cui alla pagina precedente, con $x_1 = \cos\alpha$, $y_1 = \sin\alpha$, $x_2 = \cos\beta$, $y_2 = \sin\beta$, si ha: $\overline{SR}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$. Applicando la stessa formula, stavolta con $x_1 = \cos(\alpha-\beta)$, $y_1 = \sin(\alpha-\beta)$, $x_2 = 1$, $y_2 = 0$, si ha $\overline{QP}^2 = (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha-\beta))^2$. Pertanto, da $\overline{SR}^2 = \overline{QP}^2$ segue che

$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha-\beta))^2$, cioè

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = \cos^2(\alpha-\beta) + 1 - 2\cos(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)$.

Ora, tenendo conto che $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$, $\cos^2(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta) = 1$, si ottiene

$$\cancel{1}+\cancel{1} - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = \cancel{1}+\cancel{1} - 2\cos(\alpha-\beta).$$

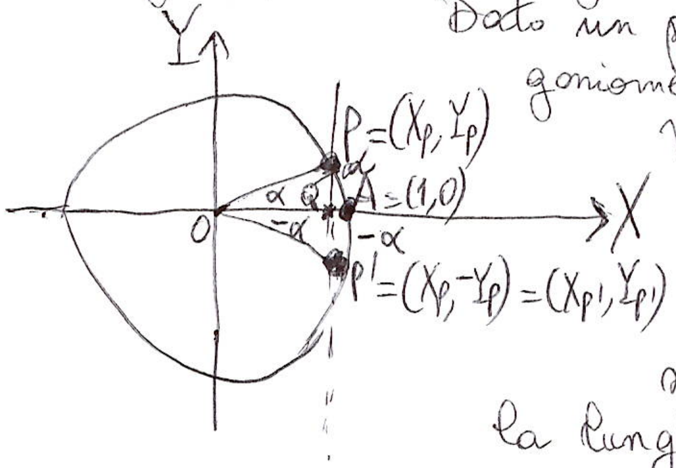
Dividendo per -2, si ha

$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$, come si voleva dimostrare.

Una formula analoga a quella della sottrazione del coseno è la FORMULA DI ADDIZIONE DEL COSENO

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Prima di dimostrarla, introduciamo il concetto di "angolo negativo" (in modo geometrico - intuitivo)



Dato un punto P della circonferenza goniometrica, associamo a P il suo punto P' simmetrico rispetto all'asse delle X (o "coniugato"). Se α è la lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$ da A a P in senso antiorario, allora $-\alpha$ è la lunghezza dell'arco $\widehat{AP'}$ da A a P' IN SENSO ORARIO (per ragioni di SIMMETRIA); quindi, come ad α abbiamo precedentemente associato l'angolo $\alpha = A\hat{O}P$, così ad $-\alpha$ associamo (in modo "naturale") l'angolo $-\alpha = A\hat{O}P'$. Nel passare da P a P', la coordinata $X_{P'}$ resta inalterata, cioè $X_{P'} = X_P$, mentre la coordinata $Y_{P'}$ cambia di segno, cioè $Y_{P'} = -Y_P$, per ragioni di simmetria. Dunque, $\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$, $\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}$ (per ogni angolo α).

$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}$$

Inoltre, dove le espressioni $tg\,\alpha$ e $tg(-\alpha)$ hanno senso, si ha:

$$\boxed{tg(-\alpha)} = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \boxed{-tg\,\alpha}.$$

Inoltre, dove le espressioni $cotg\,\alpha$ e $cotg(-\alpha)$ hanno senso, si ha:

$$\boxed{cotg(-\alpha)} = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \boxed{-cotg\,\alpha}.$$

<u>Definizione</u>: Una funzione f tale che

$$f(-\alpha) = f(\alpha) \quad \text{per ogni } \alpha \text{ (e dove ha senso)}$$

si chiama FUNZIONE PARI.

Una funzione f tale che

$$f(-\alpha) = -f(\alpha) \quad \text{per ogni } \alpha \text{ (e dove ha senso)}$$

si chiama FUNZIONE DISPARI.

Quindi, avendo per ogni α (e dove ha senso)

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$$
$$cotg(-\alpha) = -cotg\,\alpha$$

possiamo affermare che IL <u>COSENO</u> È UNA FUNZIONE <u>PARI</u>, MENTRE <u>SENO</u>, <u>TANGENTE</u> E <u>COTANGENTE</u> SONO FUNZIONI <u>DISPARI</u>.

Dimostriamo ora la
FORMULA DI ADDIZIONE DEL COSENO

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$$

(per ogni angolo α e per ogni angolo β)

Abbiamo provato che (per tutti gli angoli α e β)

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

(formula di sottrazione del coseno), quindi questa formula vale anche se al posto di β ci mettiamo β', ove $\beta' = -\beta$. Si ha pertanto

$\cos(\alpha-\beta') = \cos\alpha\cos\beta' + \sin\alpha\sin\beta'$. Ma

$\beta' = -\beta$, quindi $\alpha - \beta' = \alpha - (-\beta) = \alpha+\beta$,

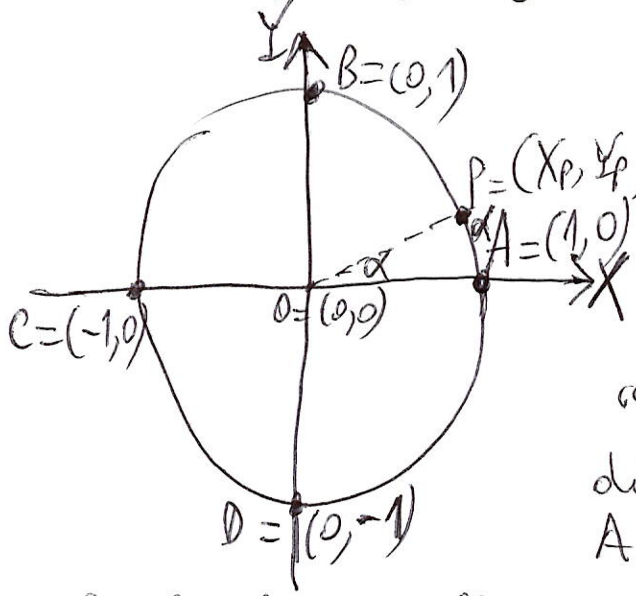
$\cos\beta' = \cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin\beta' = \sin(-\beta) = -\sin\beta$. Si ha:

$\boxed{\cos(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha-\beta') = \cos\alpha\cos\beta' + \sin\alpha\sin\beta' =$

$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cdot(-\sin\beta) = \boxed{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$

come volevamo dimostrare.

ESEMPI E PROPRIETÀ IN TRIGONOMETRIA



Ricordiamo che l'angolo α $\alpha = A\hat{O}P$ corrisponde in modo "naturale" alla lunghezza α dell'arco di circonferenza $\widehat{AP}$ che va <u>dal punto A al punto P</u> in <u>senso antiorario</u>.

La lunghezza della circonferenza di raggio R è $2\pi R$, quindi la lunghezza della circonferenza goniometrica è 2π (perché il raggio è 1), quindi l'angolo "giro" $A\hat{O}A$ (dove si fa il giro di tutta la circonferenza) è 2π (comunemente noto come $360°$). Se si prende l'"angolo degenere" $A\hat{O}A$ "restando fermi", si ottiene che da A ad A (stesso punto) rimanendo fermi è equivalente a come fare un arco di lunghezza 0 (cosa che corrisponde a 0 gradi). Se si prende l'arco di circonferenza $\widehat{AB}$ in senso antiorario, otteniamo l'angolo <u>retto</u> ($90°$) che corrisponde a $\frac{\pi}{2}$ ($=\frac{1}{4}\cdot 2\pi$, perchè è $\frac{1}{4}$ di circonferenza). Prendendo l'arco $\widehat{AC}$ in senso antiorario, otteniamo metà circonferenza, cioè $\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \boxed{\pi}$, che corrisponde all'angolo piatto ($180°$). Prendendo l'arco $\widehat{AD}$ in senso antiorario (quello che passa per i punti B e C) abbiamo $\frac{3}{4}$ di circonferenza, quindi $\frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$, che corrisponde a $270°$. Prendendo $\widehat{AD}$ in senso ORARIO, abbiamo $\frac{1}{4}$ di circonferenza ma in senso negativo (perché il verso positivo è quello ANTIORARIO, cioè quello della rotazione terrestre), quindi $-\frac{1}{4}\cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2}$, che corrisponde a $-90°$, cioè all'angolo retto con verso negativo. Quindi abbiamo la tabella

$0°$	0
$90°$	$\pi/2$
$180°$	π
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$
$360°$	2π
$-90°$	$-\frac{\pi}{2}$

Le misurazioni $0°, 90°, \ldots$ sono le misurazioni in GRADI, mentre quelle $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \ldots$ sono in RADIANTI. Quindi: A $180°$ corrispondono π radianti. A $360°$ corrispondono 2π radianti (perché la circonferenza goniometrica ha raggio 1; in generale è $2\pi R$, 2π per il raggio). Quindi se a 2π radianti corrisponde 2π per il raggio, allora a un radiante corrisponde il raggio (nel nostro caso il raggio è 1), quindi l'angolo α di un radiante corrisponde al punto P tale che la lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$ sia uguale a 1. Ma a quanti gradi sarà equivalente un radiante? Abbiamo detto che 180 gradi $= \pi$ radianti, quindi

$\frac{180}{\pi}\cdot$ [numero di] gradi $= 1$ radiante, pertanto

$$1 \text{ radiante} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \simeq \text{circa } 57°$$

Inoltre, se consideriamo la misura in gradi e la misura in radianti di un angolo, dire "180 gradi $= \pi$ radianti" equivale a formulare la proporzione

$$\frac{180}{\text{misura in gradi}} = \frac{\pi}{\text{misura in radianti}}, \text{ pertanto}$$

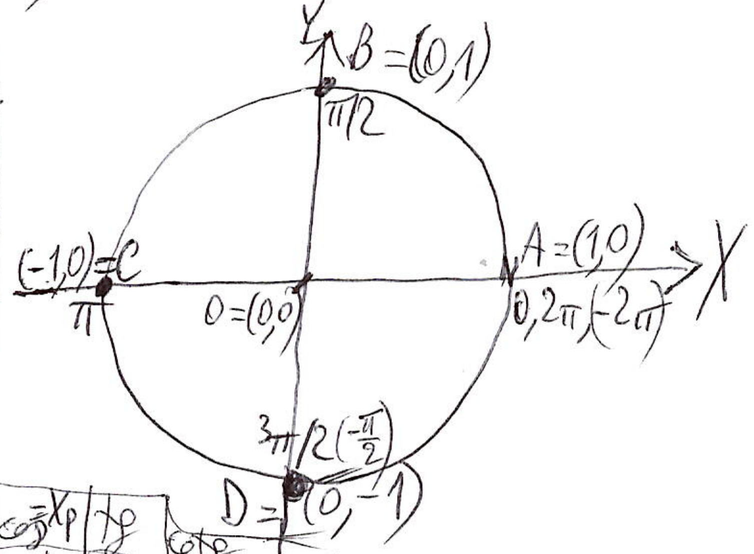
$$\text{misura in radianti} = \frac{\pi}{180}\cdot \text{misura in gradi};$$

$$\text{misura in gradi} = \frac{180}{\pi} \text{ misura in radianti.}$$

Per esempio: a 30° corrispondono $\frac{\pi}{180}\cdot 30$ radianti, cioè $\frac{\pi}{6}$ radianti; a 45° corrispondono $\frac{\pi}{180}\cdot 45$ radianti, cioè $\frac{\pi}{4}$ radianti; a 60° corrispondono $\frac{\pi}{180}\cdot 60 = \frac{\pi}{3}$ radianti; a 120° corrispondono $\frac{\pi}{180}\cdot 120$ radianti, ossia $\frac{2}{3}\pi$ radianti; per 135° si ha $\frac{\pi}{180}\cdot 135 =$ $= \frac{\pi \cdot \cancel{15} \cdot 9}{3 \cdot \cancel{5} \cdot 12} = \frac{3}{4}\pi$ radianti; a 150° corrispondono $\frac{\pi}{180}\cdot 150 = \frac{5}{6}\pi$ radianti, e così via. Si ha la tabella

30°	π/6
45°	π/4
60°	π/3
120°	2π/3
135°	3π/4
150°	5π/6

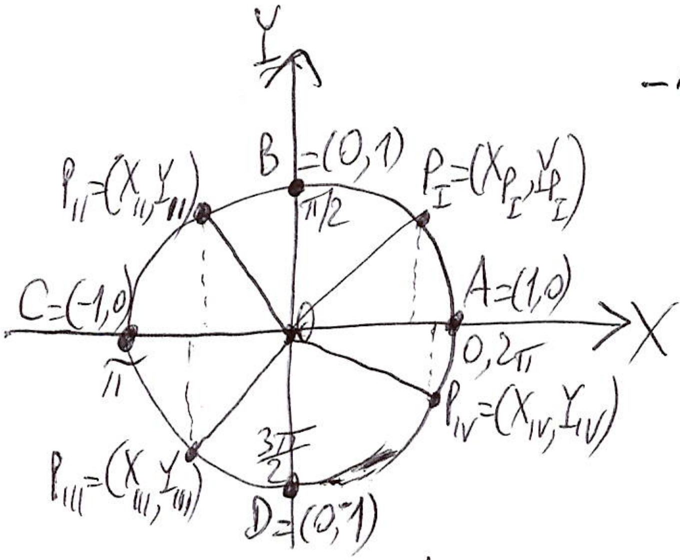
0°	0
90°	π/2
180°	π
270°	3π/2
360°	2π
−90	−π/2



Arco	Gradi	Radianti	sin = Y_P	cos = X_P	tg	cotg
$\widehat{AA}$ stando fermi	0°	0	0	1	0	non esiste
$\widehat{AB}$ antiorario	90°	π/2	1	0	non esiste	0
$\widehat{AC}$ antiorario	180°	π	0	−1	0	non esiste
$\widehat{AD}$ antiorario	270°	3π/2	−1	0	non esiste	0
$\widehat{AA}$ antiorario (1 giro)	360°	2π	0	1	0	non esiste
$\widehat{AA}$ 1 giro orario	−360°	−2π	0	1	0	non esiste

Abbiamo trovato i valori del seno e coseno semplicemente "leggendo le coordinate $X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C, X_D, Y_D$" e della tangente e cotangente con le formule $\frac{Y_P}{X_P}$ e $\frac{X_P}{Y_P}$ (il "non esiste" deriva dal fatto che NON SI PUÒ DIVIDERE PER ZERO)

E SENZA IMPARARE MENTE A MEMORIA !!!



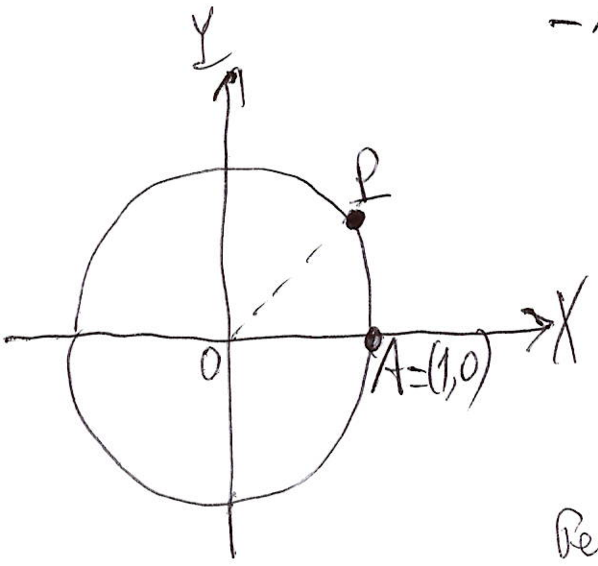
Sempre "leggendo" le coordinate X_p, Y_p e pensando (X_p = coseno, Y_p = seno) si ricava la seguente TABELLA del SEGNO delle funzioni seno, coseno, tangente e cotangente

(estremi esclusi...)		sin	cos	tg	cotg
Da 0 a $\pi/2$	I Quadrante	+	+	+	+
Da $\pi/2$ a π	II Quadrante	+	—	—	—
Da π a $\frac{3}{2}\pi$	III Quadrante	—	—	+	+
Da $\frac{3}{2}\pi$ a 2π	IV Quadrante	—	+	—	—

Inoltre, sempre graficamente dalla circonferenza goniometrica, si vede che, per ogni punto P della circonferenza goniometrica, i valori X_p e Y_p sono sempre compresi fra -1 e 1 (estremi inclusi, perché – come abbiamo visto – ci sono casi in cui il seno vale -1, oppure 1, come pure per il coseno). Otteniamo quindi, per ogni angolo α:

$$\boxed{-1 \leq \sin\alpha \leq 1}$$

$$\boxed{-1 \leq \cos\alpha \leq 1}$$



Adesso notiamo che si possono considerare anche "angoli" più grandi di 2π, o "angoli negativi" più piccoli di -2π. Naturalmente si deve considerare la corrispondente lunghezza d'arco.

Per esempio, sia $\alpha = \frac{9}{4}\pi$. Notiamo che $\frac{9}{4}\pi$ è più grande di $2\pi = \frac{8}{4}\pi$. Allora alla lunghezza $\alpha = \frac{9}{4}\pi$ quale punto P della circonferenza goniometrica sarà associato? Osserviamo che $\frac{9}{4}\pi$ si scrive anche come: $\frac{9}{4}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{4}$. Quindi, sulla circonferenza goniometrica, dapprima facciamo un giro di 2π in senso antiorario, e poi facciamo un arco di circonferenza di $\frac{\pi}{4}$, ottenendo lo stesso punto P che avremmo raggiunto se avessimo considerato un arco di lunghezza $\frac{\pi}{4}$.

Quindi, se a un "angolo" (= "arco di circonferenza di lunghezza") α aggiungiamo 2π, o 4π, o 6π, oppure $2k\pi$, dove k è un intero positivo, otteniamo lo stesso punto P che avremmo raggiunto considerando semplicemente α, facendo però 1 giro (in più) in senso antiorario nel caso 2π, 2 giri (in più) in senso antiorario nel caso 4π, ..., k giri (in più) in senso antiorario nel caso $2k\pi$. Se invece ad α si "aggiunge" -2π, o -4π, oppure $-2k\pi$, dove k è un intero negativo, otteniamo lo stesso punto P dove saremmo arrivati considerando α, facendo però 1 giro (in più) in senso ORARIO nel caso -2π, 2 giri (in più) in senso ORARIO nel caso -4π, ..., k giri (in più) in senso ORARIO nel caso $-2k\pi$.

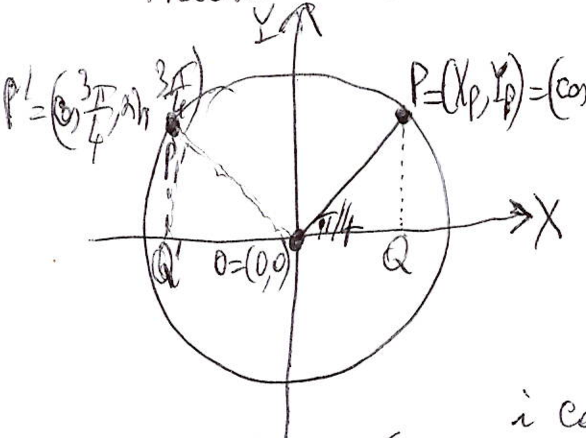
Notiamo che, quando si gira in senso orario, si deve considerare sempre il verso negativo. Siccome si ottiene lo stesso punto P, allora si ottengono gli stessi valori di seno, coseno, tangente e cotangente, ottenendo, per ogni angolo α e per ogni k intero relativo (cioè per ogni k appartenente all'insieme $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$),

$\boxed{\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha}$; $\boxed{\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha}$

(a k positivo corrisponderanno i giri in senso antiorario, mentre a k negativo corrisponderanno i giri in senso orario), e una proprietà analoga per tangente e cotangente; ma per queste ultime due funzioni il risultato può essere migliorato, ottenendo, per ogni angolo α e per ogni $k \in \mathbb{Z}$, e <u>dove ha senso</u>,

$\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{cotg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{cotg}\alpha$.

Adesso calcoliamo seno, coseno, tangente e cotangente di $\frac{\pi}{4}$ $(=45^\circ)$.



Innanzi tutto, osserviamo che il triangolo OPQ è rettangolo <u>isoscele</u>: infatti l'angolo $P\hat{Q}O$ è retto $(=90^\circ)$, l'angolo $P\hat{O}Q$ misura 45° e, per differenza, l'angolo $O\hat{P}Q$ misura $180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$. Pertanto i cateti OQ e QP saranno uguali, ma

$OQ = \cos\frac{\pi}{4}$, $QP = \sin\frac{\pi}{4}$, e dunque $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$, ottenendo

$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\pi/4}{\cos\pi/4} = \frac{\cos\pi/4}{\cos\pi/4} = \boxed{1}$; $\boxed{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos\pi/4}{\sin\pi/4} = \frac{\sin\pi/4}{\sin\pi/4} = \boxed{1}$

Ora, sia $l = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$. Per calcolare l usiamo l'identità fondamentale $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ottenendo $l^2 + l^2 = 1$, cioè $2l^2 = 1$, ossia $l^2 = \frac{1}{2}$. Notiamo che l è positivo (si vede dal disegno, tra l'altro siamo sul I Quadrante) e quindi $l = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Pertanto $\boxed{\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

[N.B.: Con un ragionamento analogo, osservando che il triangolo $OQ'P'$ è rettangolo e isoscele, e grazie alle "simmetrie", si può vedere che $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (siamo questa volta sul II° Quadrante, $\frac{3\pi}{4} = 135°$, quindi il coseno è negativo, perché è la coordinata X, mentre il seno è positivo, in quanto è la coordinata Y),

e quindi $tg\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = -1$,

$cotg\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{4}} = -1$.]

Adesso, i prossimi passi sono:

- calcolare i valori di seno, coseno, tangente e cotangente di $\frac{\pi}{3}$ (60°) e $\frac{\pi}{6}$ (30°);
- stabilire forme di sottrazione e addizione anche per il seno;
- stabilire forme di duplicazione per seno e coseno

in modo tale da avere gli strumenti matematici per poter calcolare seno, coseno, tangente e cotangente anche di altri angoli, senza andare a fare ogni volta la dimostrazione con il disegno, ma utilizzando tecniche più rapide. Dopodiché studieremo equazioni e disequazioni trigonometriche, ma per far ciò introdurremo le RETTE nella Geometria Analitica, stabilendo COLLEGAMENTI PROFONDI TRA RETTE E TRIGONOM.

Prima di fare ciò, premettiamo e dimostriamo due proprietà che legano seno e coseno: per tutti gli angoli α, β si ha: $\left(\frac{\pi}{2} = 90°\right)$

I) $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta}$

II) $\boxed{\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$

Per ricordarsi queste due formule, pensiamo alla II) e alla definizione etimologica del coseno:

cosinus = complementi sinus

(cioè seno dell'angolo <u>complementare</u>: due angoli sono complementari se la loro somma è $\frac{\pi}{2}$), e quindi la I) sarà: "sinus = complementi cosinus".

Dimostriamo dapprima la I). Abbiamo visto che per tutti gli angoli α, β si ha

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

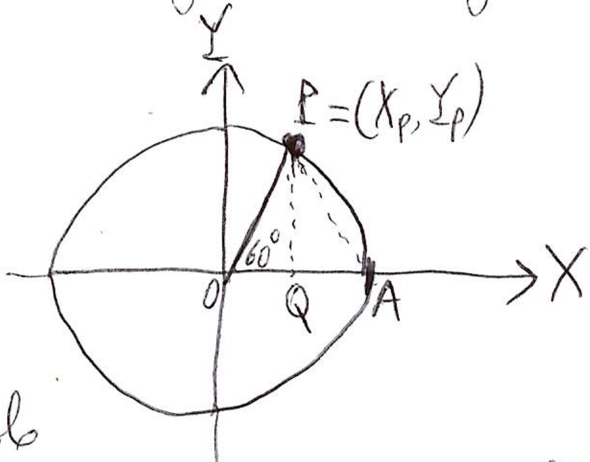
e quindi, prendendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$, otteniamo

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\cos\beta + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\sin\beta = \boxed{\sin\beta}$$, cioè la I)

Proviamo ora la II). Nella I), prendiamo $\boxed{\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha}$. Si ha allora $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, quindi $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta}$. Si ottiene:

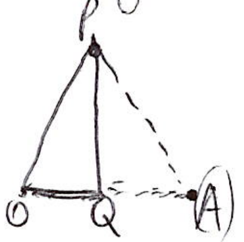
$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \sin\beta \xrightarrow{\text{formula I}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \boxed{\cos\alpha}$$, cioè la II).

Adesso calcoliamo seno, coseno, tangente e cotangente di $\frac{\pi}{3} = 60°$



L'angolo $P\hat{O}Q$ misura $\frac{\pi}{3} = 60°$, l'angolo $P\hat{Q}O$ è retto $\left(\frac{\pi}{2} = 90°\right)$, e quindi, per differenza, l'angolo $O\hat{P}Q$ misura $180° - (90° + 60°) = 180° - 150° = 30° = \frac{\pi}{6}$

Ma allora il triangolo OPQ è la metà di un triangolo equilatero, avendo gli angoli di 90°, 60° e 30°



In particolare, per simmetria, si avrà che la lunghezza del segmento OQ è la <u>metà</u> di quella del segmento OP (che era uguale a 1 <u>in quanto raggio della circonferenza goniometrica</u>). Pertanto, $\overline{OQ} = X_P = \boxed{\cos\frac{\pi}{3}} = \cos 60° = \boxed{\frac{1}{2}}$. Per determinare il seno di $\frac{\pi}{3}$, cioè la lunghezza del segmento QP, applichiamo l'identità fondamentale: $\sin^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3} = 1$

$\sin^2\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4} = 1 \qquad \sin^2\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Considerando che il seno di $\frac{\pi}{3}$ è positivo (siamo sul I Quadrante), si ha

$\boxed{\sin\frac{\pi}{3}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Inoltre, $\boxed{tg\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cancel{2} = \sqrt{3}$;

$\boxed{cotg\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{tg\frac{\pi}{3}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

N.B.: Siccome $\overline{OQ} = \frac{1}{2}$ e i lati del triangolo equilatero misurano tutti 1, allora uno dei vertici del triangolo equilatero è proprio A, perché $OA = 1$ (!)

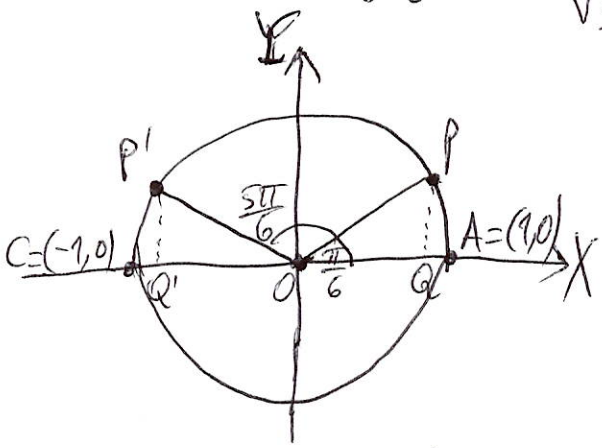
Adesso, utilizzando la I) e la II) (vedi 2 pagine indietro), calcoliamo seno, coseno, tangente e cotangente di $\frac{\pi}{6} = 30°$, tenendo conto che

(per la I)) $\boxed{\sin 30°} = \cos(90° - 30°) = \cos 60° = \boxed{\frac{1}{2}}$

(per la II)) $\boxed{\cos 30°} = \sin(90° - 30°) = \sin 60° = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$\boxed{tg\,\frac{\pi}{6}} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\boxed{cotg\,\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{tg\,\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \boxed{\sqrt{3}}$$



Osservazione: che succede a $150° = \frac{5\pi}{6}$?

Per simmetria: $\sin\frac{5\pi}{6} = Q'P' \equiv QP = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

$\cos\frac{5\pi}{6} = OQ' = -OQ = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[Osserviamo che $150° = \frac{5\pi}{6}$ sta sul II Quadrante, quindi il seno è positivo mentre il coseno è negativo]

Adesso, utilizzando sempre la I) e la II) e le formule di addizione e sottrazione del coseno, dimostriamo le seguenti formule:

FORMULA DI ADDIZIONE DEL SENO

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$ per tutti gli angoli α, β

Dimostrazione: sappiamo che

(**) $\cos(\alpha'-\beta) = \cos\alpha'\cos\beta + \sin\alpha'\sin\beta$ per tutti gli angoli α', β

Dalle formule I) e II) sappiamo che

(***) $\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$

(****) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$

(*****) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

Applicando la formula (**) con $\alpha' = \frac{\pi}{2}-\alpha$, e usando (***), (****) e (*****), si ottiene

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) \overset{(**)}{=}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta = \boxed{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

come volevamo dimostrare. Adesso dimostriamo la

FORMULA DI SOTTRAZIONE DEL SENO

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$ per tutti gli angoli α, β

Sappiamo che $\sin(\alpha+\beta') = \sin\alpha\cos\beta' + \cos\alpha\sin\beta'$ (per tutti gli angoli α, β')

Ponendo $\beta' = -\beta$, si ha:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta') = \sin\alpha\cos\beta' + \cos\alpha\sin\beta' = \sin\alpha\cos(-\beta) +$$

$$+\cos\alpha\sin(-\beta) = \boxed{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta},$$ in quanto, come abbiamo visto precedentemente, $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$.

Quindi abbiamo dimostrato anche la formula di sottrazione del seno.

Utilizzeremo le formule di ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DEL SENO E DEL COSENO (cioè: LE FORMULE SU CUI POGGIA LA TRIGONOMETRIA) PER CALCOLARE VALORI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE IN PUNTI DIVERSI DA $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ e DIVERSI DA PUNTI "COLLEGATI" CON QUESTI ULTIMI (come $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \dots$).

Gradi	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tenere in mente come riepilogo!!

Esempi:

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ+30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ+30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Per le proprietà "cosinus = complementi sinus" e "sinus = complementi cosinus", sappiamo che $\cos 15^\circ = \sin(90^\circ-15^\circ) = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ = \cos(90^\circ-15^\circ) = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, ma calcoliamoli con le formule di sottrazione del coseno e del seno. Si ha:

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ-30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ-30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

CONSEGUENZE — Dalla formula di addizione del seno con α e $\beta=\alpha$, si ottiene

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha,$$

cioè $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$; dalla formula di addizione del coseno, con α e $\beta=\alpha$, si ha

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha,$$ cioè

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

Tenendo conto che $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, e quindi $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$, $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$, si ha anche

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$
$$\cos 2\alpha = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$
$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

IMPORTANTE ESERCIZIO DI TRIGONOMETRIA

Calcolare $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$, $tg\,\frac{\pi}{8}$, $cotg\,\frac{\pi}{8}$

$\left(\frac{\pi}{8} = 22°30'\right)$

Utilizziamo la formula

(*) $\boxed{\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1}$

ove $\alpha = \frac{\pi}{8}$, quindi $2\alpha = \frac{\pi}{4}$, e dunque $\cos(2\alpha) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Poniamo $x = \cos\frac{\pi}{8}$, $y = \sin\frac{\pi}{8}$ (notiamo che x ed y sono entrambi positivi, in quanto l'angolo di $\frac{\pi}{8}$ radianti sta nel I Quadrante). Quindi $x^2 = \cos^2\frac{\pi}{8} = \cos^2\alpha$ e pertanto $2\cos^2\alpha - 1 = 2x^2 - 1$. Pertanto la formula (*), nel nostro caso, diventa

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2x^2 - 1, \text{ quindi } 2x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1,$$

$x^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$, da cui $\boxed{x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$ (si prende il valore positivo)

Per calcolare ora $y = \sin\frac{\pi}{8} = \sin\alpha$, teniamo conto che $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, cioè $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, quindi $y^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, pertanto

$\boxed{y = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$ (anche qui si prende il valore positivo). Si ha:

$$t = \boxed{tg\,\frac{\pi}{8}} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{y}{x} = y\cdot\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$= \boxed{\sqrt{2}-1}$; $w = \boxed{cotg\,\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \boxed{\sqrt{2}+1}$

N.B.: dove ha senso: $\boxed{cotg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \boxed{tg\,\alpha}$, ed anche $\boxed{tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = cotg\,\alpha}$

TABELLA DEI VALORI TRIGONOMETRICI

Gradi	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
$0°$	0	0	1	0	non esiste
$15°$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18°$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$36°$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$54°$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$72°$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$
$75°$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non esiste	0
$105°$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(2-\sqrt{3})$
$108°$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$126°$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$-\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1
$144°$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
$162°$	$\frac{9\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$165°$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(2+\sqrt{3})$
$180°$	π	0	-1	0	non esiste
Gradi	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente

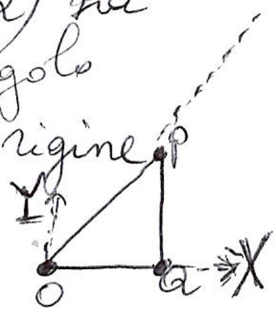
Gradi	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
$180°$	π	0	-1	0	non esiste
$195°$	$\frac{13}{12}\pi$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$198°$	$\frac{11}{10}\pi$	$-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$210°$	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$216°$	$\frac{6}{5}\pi$	$-\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
$225°$	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$234°$	$\frac{13\pi}{10}$	$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$-\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$240°$	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$252°$	$\frac{7\pi}{5}$	$-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$
$255°$	$\frac{17}{12}\pi$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	non esiste	0
$285°$	$\frac{19}{12}\pi$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(2-\sqrt{3})$
$288°$	$\frac{8}{5}\pi$	$-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$
$300°$	$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$306°$	$\frac{17}{10}\pi$	$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$315°$	$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1
$324°$	$\frac{9}{5}\pi$	$-\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$
$330°$	$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
$342°$	$\frac{19}{10}\pi$	$-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$345°$	$\frac{23}{12}\pi$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(2+\sqrt{3})$
$360°$	2π	0	1	0	non esiste

Esercizio (che fa parte del programma anche se non fosse svolto a lezione)

a) Provare che, in un qualsiasi triangolo rettangolo, la lunghezza di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente α;

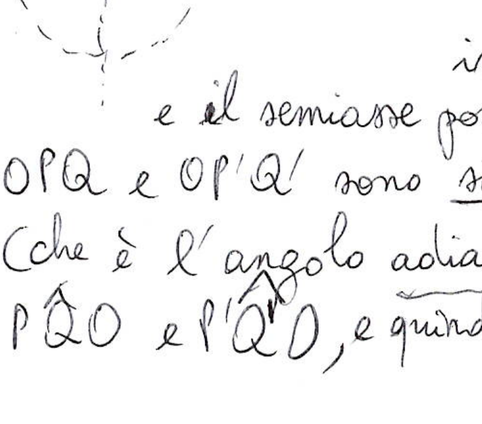
b) la lunghezza di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto β.

Dimostrazione. Iniziamo dal punto a). Sia OPQ il nostro triangolo rettangolo. Fissiamo un sistema di riferimento nel piano cartesiano in modo tale che il nostro cateto (che chiameremo OQ) sia contenuto nell'asse delle X e che l'angolo $O\hat{Q}P$ sia l'angolo retto e che O sia l'origine degli assi cartesiani. I casi sono due: 1)



oppure 2)

Consideriamo dapprima il caso 1, e tracciamo la semiretta s che contiene il segmento OP (dal lato P). Senza restrizione, supponiamo che la lunghezza $\overline{OP}$ sia maggiore di 1 (analogamente si procede negli altri casi).



La circonferenza goniometrica $\mathcal{C}$ incontrerà la semiretta s nel punto P' e il semiasse positivo delle X nel punto Q'. I triangoli OPQ e $OP'Q'$ sono simili, perché hanno uguali l'angolo α (che è l'angolo adiacente al cateto OQ) e gli angoli retti $P\hat{Q}O$ e $P'\hat{Q}'O$, e quindi hanno i lati in proporzione.

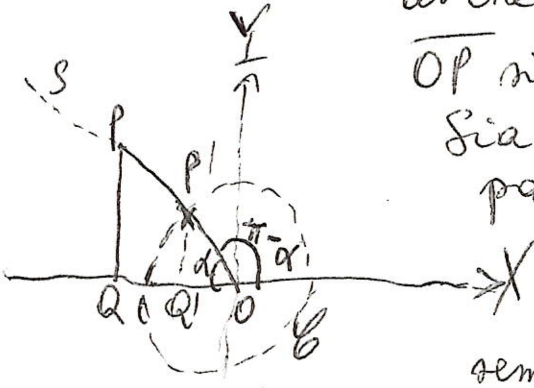
Allora, per definizione di coseno, si ha

$\boxed{\cos\alpha} = \overline{OQ'} = \dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}}$ (perché $\overline{OP'}$ = (lunghezza del) raggio della circonferenza goniometrica = 1) $= \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$ (perché i triangoli OPQ e $OP'Q'$ sono simili e quindi hanno i lati in proporzione) $= \dfrac{\text{lunghezza cateto dato}}{\text{lunghezza ipotenusa}}$, cioè

lunghezza ipotenusa = (lunghezza cateto dato) $\cdot \cos\alpha$

come si doveva dimostrare.

Veniamo ora al caso 2), e supponiamo senza restrizione, anche in questo caso, che la lunghezza $\overline{OP}$ sia maggiore di 1 (come nel caso 1)). Sia s la semiretta OP (prolungata dalla parte di P). La circonferenza goniometrica $\mathscr{C}$ incontrerà la semiretta s nel punto P' e il semiasse negativo delle X nel punto Q'.



I triangoli OPQ e $OP'Q'$ sono simili, perché hanno uguali l'angolo α (che è l'angolo adiacente al cateto OQ) e gli angoli retti $P\hat{Q}O$ e $P'\hat{Q'}O$, e quindi hanno i lati in proporzione. Pertanto, se considero i segmenti QO e $Q'O$ orientati da sinistra a destra (quindi con verso positivo), per definizione di coseno, si ha:

$\cos(\pi-\alpha) = \overline{OQ'} = -\overline{Q'O} = -\dfrac{\overline{Q'O}}{\overline{P'O}}$ (perché $\overline{P'O} = 1$, in quanto OP' è il raggio della circonferenza goniometrica) $= -\dfrac{\overline{QO}}{\overline{PO}}$

Ora, se dimostriamo che

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$

abbiamo fatto, perché si ottiene $-\cos\alpha = -\dfrac{\overline{QO}}{\overline{PO}}$ e quindi

$$\cos\alpha = \frac{\overline{QO}}{\overline{PO}} = \frac{\text{lunghezza cateto dato}}{\text{lunghezza ipotenusa}}\ , \text{ossia}$$

lunghezza ipotenusa = (lunghezza cateto dato) $\cdot \cos\alpha$

Tutto sta a dimostrare che

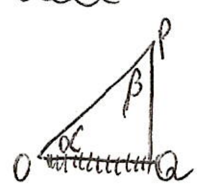
$$\boxed{\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha}\ .$$

Infatti, per la formula di sottrazione del coseno, si ha

$$\boxed{\cos(\pi-\alpha)} = \underbrace{\cos\pi}_{=1}\cos\alpha + \underbrace{\sin\pi}_{=0}\sin\alpha = \boxed{-\cos\alpha},$$

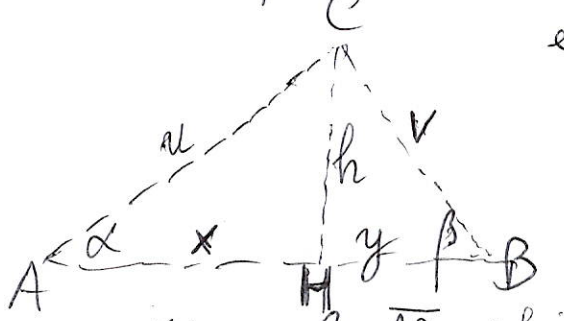
come volevamo dimostrare.

Ora veniamo al punto b), cioè dimostriamo che la lunghezza di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto β. Ma, per il punto a), sappiamo che la lunghezza del cateto considerato è uguale alla lunghezza dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente α. Quindi il punto b) si deduce (quasi) subito dal punto a) se si prova che il seno dell'angolo opposto β è uguale al coseno dell'angolo adiacente α. Ma notiamo che $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$:



infatti l'angolo in Q è retto e quindi misura $\frac{\pi}{2}$, quindi $\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta = \pi$ (la somma degli angoli (interni) di un qualsiasi triangolo è $180°$, cioè π radianti) e quindi $\boxed{\beta} = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \boxed{\frac{\pi}{2} - \alpha}$, come si voleva dimostrare. Allora, per la formula sinus = complementi cosinus, si ottiene $\boxed{\sin\beta} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \boxed{\cos\alpha}$, e pertanto anche il punto b) dell'esercizio è dimostrato.

Esercizio: Calcolare la distanza tra due punti inaccessibili C ed H. Supponiamo di avere due punti accessibili A e B come in figura,



e di conoscere gli angoli $\alpha = C\hat{A}H$, $\beta = C\hat{B}H$.

Usiamo il risultato dell'esercizio precedente applicato al triangolo CHA, rettangolo in H: la lunghezza del cateto h, cioè la distanza $\overline{CH}$

$x + y = l = \overline{AB}$

è uguale ad $u \cdot \sin\alpha$ (ipotenusa · seno dell'angolo opposto), mentre la lunghezza del cateto x è uguale ad $u \cdot \cos\alpha$ (lunghezza dell'ipotenusa · coseno dell'angolo adiacente). Inoltre, usando il risultato dell'esercizio precedente applicato al triangolo CHB, rettangolo in H, si ha che $h = v \cdot \sin\beta$ (β è l'angolo opposto ad h), mentre $y = v \cdot \cos\beta$ (β è l'angolo adiacente a y). Come determiniamo allora h (che non conosciamo) in funzione di x e di α (che conosciamo)? Si ha: $h = u \cdot \sin\alpha$, $x = u \cdot \cos\alpha$, quindi $\frac{h}{x} = \frac{\cancel{u}\sin\alpha}{\cancel{u}\cos\alpha} = tg\,\alpha$. Analogamente, come determiniamo h (che non conosciamo) in funzione di y e di β (che conosciamo)? Si ha: $h = v \cdot \sin\beta$, $y = v \cdot \cos\beta$, quindi $\frac{h}{y} = \frac{\cancel{v}\sin\beta}{\cancel{v}\cos\beta} = tg\,\beta$. Pertanto $h = x\, tg\,\alpha$, $h = y\, tg\,\beta$, da cui $x = \frac{h}{tg\,\alpha}$, $y = \frac{h}{tg\,\beta}$. Da ciò, siccome $x + y = l$, otteniamo $l = x + y = \frac{h}{tg\,\alpha} + \frac{h}{tg\,\beta} = h\left(\frac{1}{tg\,\alpha} + \frac{1}{tg\,\beta}\right)$

Conosciamo α, β, l e adesso siamo in grado di calcolare h.

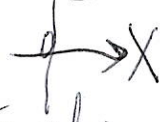
Da $l = h \cdot \left(\frac{1}{tg\,\alpha} + \frac{1}{tg\,\beta} \right)$ si ottiene

$$h = \frac{l}{\frac{1}{tg\,\alpha} + \frac{1}{tg\,\beta}} = \frac{l}{cotg\,\alpha + cotg\,\beta} =$$

$$= \frac{l}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}} = \frac{l}{\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}} =$$

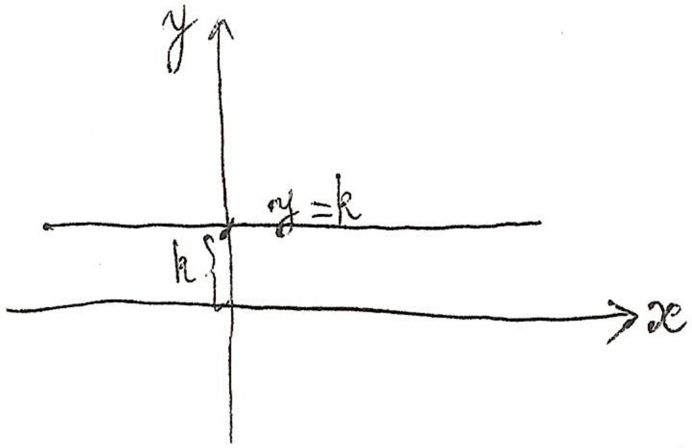
$$= \frac{l \cdot (\sin\alpha \cdot \sin\beta)}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = \frac{l\,\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$, perché, per la FORMULA DI ADDIZIONE DEL SENO, si ha

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

Il prossimo passo è lo studio delle equazioni e disequazioni trigonometriche: ma prima analizziamo le RETTE, che ci serviranno sia come grande aiuto per risolvere le equazioni e disequazioni trigonometriche sia per stabilire COLLEGAMENTI PROFONDI FRA RETTE E TRIGONOMETRIA. Nelle rette, considereremo la notazione  nel piano cartesiano; nelle (dis)equazioni trigonometriche, torneremo alla notazione  perché si porrà $X = \cos x$, $Y = \sin x$, ed è per questo che abbiamo usato X ed Y MAIUSCOLE (per distinguerle dalla x di $\sin x$ e $\cos x$).

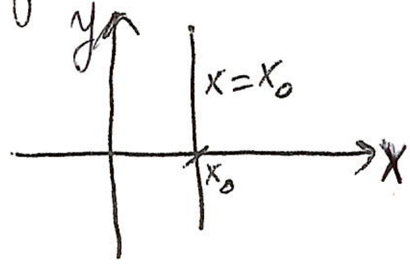
EQUAZIONE DELLA RETTA

Consideriamo il piano cartesiano



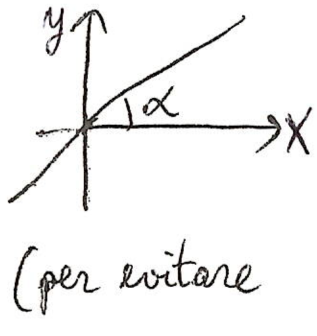
Una RETTA ORIZZONTALE è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali $y = k$, ove k è un' opportuna costante reale (per esempio 2, 3, 5 ...)

Una RETTA VERTICALE è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali $x = x_0$, ove x_0 è un' opportuna costante reale.

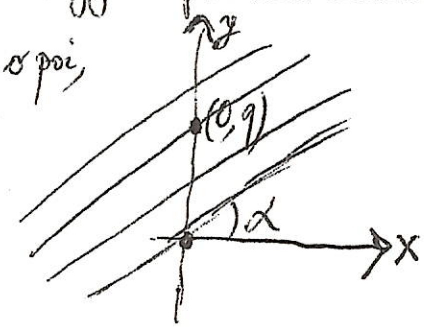


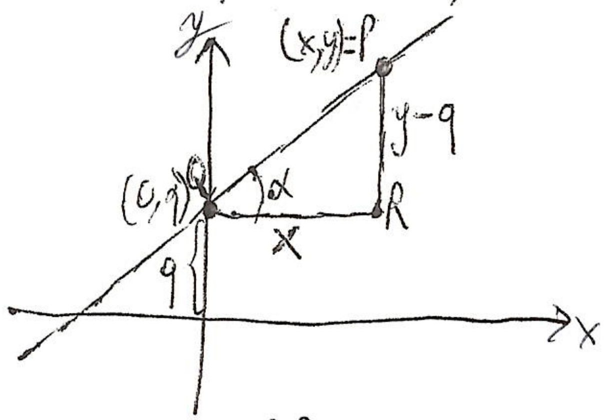
Che cos'è una RETTA OBLIQUA?

Il concetto di OBLIQUITÀ si esprime con un angolo α (angolo formato con il semiasse positivo delle x), che sarà la nostra "inclinazione", e che sarà compreso tra 0 e π, esclusi $0, \pi, \frac{\pi}{2}$ (per evitare rette orizzontali o verticali)



Per individuare una e una sola retta obliqua avente inclinazione α si deve imporre il passaggio per un determinato punto, per esempio $(0, q)$. Prima o poi, tra le rette oblique in figura, troveremo quella passante per il punto $(0, q)$.





Come ricaviamo l'equazione di una retta obliqua? Sia $P=(x,y)$ un generico punto della retta. Allora si ha $QR = x$, $RP = y-q$,

$$\frac{RP}{QR} = \frac{\frac{RP}{QP}}{\frac{QR}{QP}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \frac{\text{(cateto opposto)}}{\text{(cateto adiacente)}} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ quindi}$$

$$\frac{y-q}{x} = \operatorname{tg}\alpha \qquad y-q = (\operatorname{tg}\alpha)\cdot x \qquad y = (\operatorname{tg}\alpha)\cdot x + q$$

Posto $m = \operatorname{tg}\alpha$ (m numero reale per evitare le rette verticali, $m \neq 0$ per evitare le rette orizzontali), si trova la formula $\boxed{y = mx + q}$. (m è il COEFFICIENTE ANGOLARE)

Se vogliamo una forma nella quale possono essere scritte tutte quante le rette, orizzontali, verticali e oblique, si scrive

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

(per $a=0$, $b\neq 0$ si ottiene $y = -\frac{c}{b}$ retta orizzontale; per $a\neq 0$, $b=0$ si ottiene $x = -\frac{c}{a}$ retta verticale; si noti che non è mai $a=b=0$).

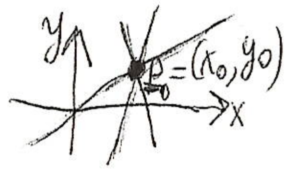
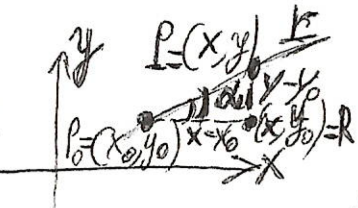
Fig.1 

Fig.2 

Inoltre, per determinare la famiglia delle rette passanti per un punto fissato $P_0=(x_0,y_0)$, si osservi che un punto $P=(x,y)$ appartiene alla retta r in Figura 2 se e solo se $\frac{PR}{P_0R}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\operatorname{tg}\alpha=m$, ove m è il coefficiente angolare di r. Al variare di $m\in\mathbb{R}$ (oppure al variare di $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$) (α positivo α negativo) si ottiene che la totalità delle rette passanti per il punto (x_0,y_0) (TRANNE LA RETTA VERTICALE) è espressa da $\boxed{y-y_0=m\cdot(x-x_0)}$, oppure $y-y_0=(\operatorname{tg}\alpha)\cdot(x-x_0)$, che è l'equazione del fascio di rette passanti per il punto (x_0,y_0).

PER UN PUNTO PASSANO INFINITE RETTE

Esercizio: Scrivere l'equazione della retta passante per i punti (1,1) e (2,3) (Per 2 punti passa UNA e UNA SOLA RETTA).

Si vede che si tratta di una retta OBLIQUA. Quindi ~~si~~ può direttamente scrivere $y=mx+q$ e imporre il passaggio per i punti (1,1) e (2,3), determinando quindi m e q. Se al posto di x ci mettiamo 1 e al posto di y ci mettiamo 1, si deve avere

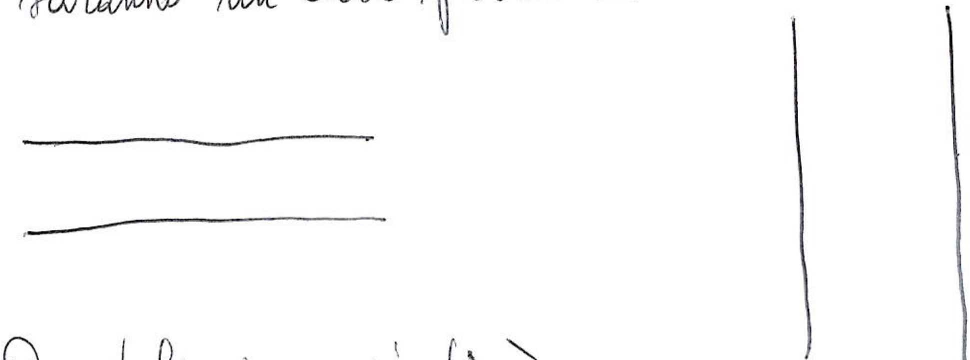
$1=m\cdot1+q$, quindi $m+q=1$. Se al posto di x ci mettiamo 2 e, al posto di y, 3, si ha

$3=2m+q$ $\quad\begin{cases} m+q=1 \\ 2m+q=3\end{cases}$ $\quad q=1-m$ $\quad 2m+1-m=3$ $\quad m=3-1=2$

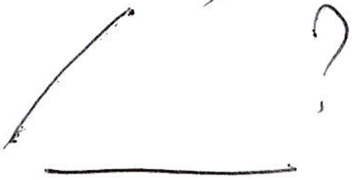
$m=2$ $\quad q=1-2=-1$

La retta è $\boxed{y=2x-1}$.

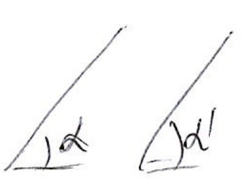
Adesso veniamo al concetto di <u>RETTE PARALLELE</u>
(n.b.: nel nostro contesto, due rette coincidenti saranno un caso particolare di due rette parallele).



Per <u>definizione</u>, si dirà
che due qualsiasi rette entrambe ORIZZONTALI (oppure entrambe VERTICALI) sono <u>parallele</u>,
e che una retta orizzontale e una retta obliqua <u>non sono mai parallele</u>, come pure una retta verticale e una retta obliqua <u>non sono mai parallele</u>, come anche l'intuizione suggerisce.



Diremo allora che due rette <u>ENTRAMBE OBLIQUE</u> sono <u>PARALLELE</u> se e solo se hanno la stessa "direzione" α (cioè, nella figura, se e solo se $\alpha = \alpha'$)



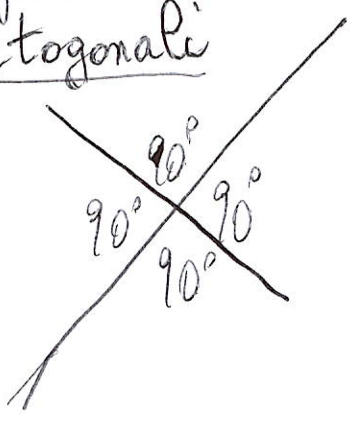
Ora proviamo che due rette oblique $y = mx + q$ oppure $y = (\operatorname{tg}\alpha)x + q$ ed $y' = m'x + q'$ oppure $y' = (\operatorname{tg}\alpha')x + q'$ (ove m, m' sono i rispettivi coefficienti angolari (ricordiamo che m ed m' sono numeri <u>REALI</u> <u>diversi da 0</u>, essendo le nostre rette OBLIQUE) ed α, α' sono le rispettive "direzioni", "inclinazioni") <u>SONO PARALLELE SE E SOLO SE $m = m'$</u>, cioè $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha'$. (cioè hanno lo stesso coefficiente angolare)

Prima di tutto osserviamo che, per definizione, le rette $y = mx + q$ oppure $y = (\operatorname{tg}\alpha)\,x + q$ ed $y = m'x + q'$ oppure $y = (\operatorname{tg}\alpha')\,x + q'$ sono parallele se e solo se $\alpha = \alpha'$. Ciò implica, naturalmente, che $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha'$, cioè $\boxed{m = m'}$.

Viceversa, notiamo che si ha questa proprietà (che adesso, in questo contesto, diamo per buona): se α ed α' sono due angoli compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, estremi esclusi, oppure compresi fra 0 e π (esclusi 0, π e $\frac{\pi}{2}$) aventi la stessa tangente (goniometrica), allora α deve necessariamente coincidere con α'.

Quindi, utilizzando questa proprietà, si ha che, se $m = m'$, allora $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha'$, e quindi $\alpha = \alpha'$, come si voleva dimostrare.

Definizione: Due rette si dicono perpendicolari oppure ortogonali se formano 4 angoli di $90° = \frac{\pi}{2}$ radianti, come in figura.



N.B.: Etimologicamente, "ortogonale" deriva da "angolo retto" (!!)

$\gamma = \beta - \alpha$

Dimostriamo che 2 rette (oblique) $y = mx + q = (\operatorname{tg}\alpha)x + q$
$y = m'x + q' = (\operatorname{tg}\beta)x + q'$

sono perpendicolari se e solo se i coefficienti angolari sono reciproci e opposti, cioè $mm' = -1$ (p. es. $\frac{2}{3}$ e $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$ e $-\frac{4}{3}$ ...), cioè $\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -1}$

INFATTI le due rette in figura sono perpendicolari se e solo se $\beta - \alpha = 90°$, cioè se e solo se $\cos(\beta - \alpha) = 0$ $\left(\cos 90° = \cos\frac{\pi}{2} = 0\right)$, e se e solo se: $0 = \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \beta)$ (perché il coseno è una funzione pari) $=$ (prima formula fondamentale su cui poggia la trigonometria) $= \boxed{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 0}$. Dividendo per $\cos\alpha\cos\beta$ (tanto, le rette sono oblique!) si ha

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = 0,$$ cioè $1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 0$, ossia $\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -1}$, come volevasi dimostrare.

Esercizio: Scrivere l'equazione della retta s passante per i punti $P_1=(-1,1)$ e $P_2=(2,0)$.

Notiamo che i punti P_1 e P_2 non hanno né la stessa ascissa x né la stessa ordinata y, e pertanto s è una retta obliqua del tipo $y=mx+q$. Ora determiniamo m e q in modo tale che la retta s passi per i punti P_1 e P_2. Imporre il passaggio per $P_1=(-1,1)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo -1 e al posto di y ci mettiamo 1, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ deve essere verificata, cioè si deve avere $\boxed{1=-m+q}$. Inoltre, imporre il passaggio per $P_2=(2,0)$ vuol dire che, se al posto di x ci mettiamo 2 e al posto di y ci mettiamo 0, allora l'uguaglianza $y=mx+q$ dev'essere verificata, cioè si deve avere $\boxed{0=2m+q}$. Abbiamo dunque un sistema lineare di 1° grado a 2 equazioni e 2 incognite, m e q.

$$\begin{cases} -m+q=1 \\ 2m+q=0 \end{cases}$$

Dalla 2ª equazione si ha $q=-2m$; sostituendo q con $-2m$ nella 1ª equazione, si ha $-m-2m=1$, cioè $-3m=1$, $3m=-1$, $\boxed{m=-\frac{1}{3}}$

Dalla relazione $q=-2m$, si ha: $q=(-2)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$. La retta s è:

$$\boxed{y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}$$

Esercizio: Scrivere l'equazione della retta r perpendicolare ad s e passante per il punto $P_0=(2,3)$. (ove s ha equazione $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$)

L'equazione del fascio di rette passanti per un punto $P_0=(x_0,y_0)$ (tranne la retta verticale) è $\boxed{y-y_0=m\cdot(x-x_0)}$ (*)

Ora, nel testo dell'esercizio, si richiede che r sia perpendicolare ad s, che è obliqua, e quindi r è obliqua, e non verticale. Possiamo usare (*). Poiché due rette sono perpendicolari se e solo se i loro rispettivi coefficienti angolari sono reciproci e opposti, allora il coefficiente angolare della retta r è 3. Poiché r deve passare per il punto $P_0=(2,3)$, allora nella formula (*) prenderemo $m=3$, $x_0=2$, $y_0=3$, ottenendo

$y-3=3\cdot(x-2)$ ossia $y-3=3x-6$, da cui $y=3x-6+3$, cioè

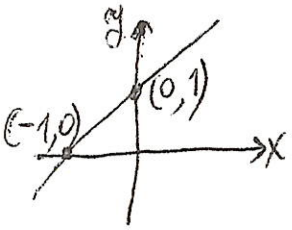
$$\boxed{y=3x-3},$$

che è l'equazione della retta r.

EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI DISTINTI

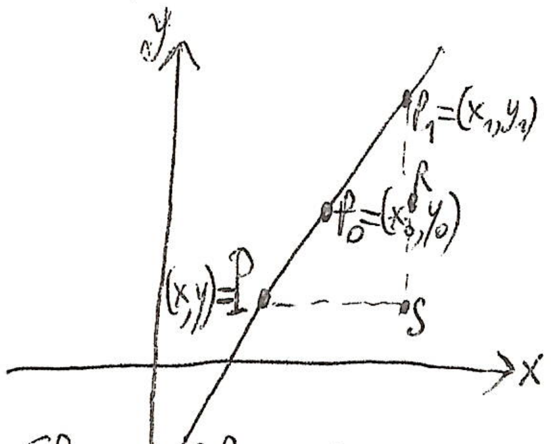
Si può fare senza ricorrere alla relativa formula, o anche ricorrendo alla formula «classica».

Consideriamo un semplice esempio: trovare l'equazione della retta passante per i punti $(0,1)$ e $(-1,0)$



Si tratta di una retta obliqua di equazione $\boxed{y = mx + q}$. Imponiamo il passaggio per il punto $(0, 1)$. Ciò vuol dire che al posto di x ci mettiamo 0, e al posto di y ci mettiamo 1. Si ha: $1 = 0 \cdot m + q$, quindi $\boxed{q = 1}$, da cui $\boxed{y = mx + 1}$. Imponiamo ora il passaggio per il punto $(-1, 0)$. In questa espressione sostituiamo x con -1 ed y con 0, ottenendo $0 = m \cdot (-1) + 1 = -m + 1$, da cui $\boxed{m = 1}$. Abbiamo ottenuto $\boxed{m = 1}$, $\boxed{q = 1}$, e pertanto l'equazione della retta cercata è $\boxed{y = x + 1}$.

Adesso vediamo la formula generale dell'equazione passante per due punti distinti $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$.



Notiamo che i triangoli rettangoli PP_1S e P_0P_1R sono simili in quanto hanno gli angoli uguali. Quindi i lati sono in proporzione. Pertanto

$$\frac{SP_1}{PS} = \frac{RP_1}{P_0R}, \text{ cioè } \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \text{ ossia } \boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}}, \text{ oppure}$$

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_0 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}.$$

Siccome, in questo contesto, il ruolo di (x_0, y_0) e (x_1, y_1) è lo stesso, la formula vale anche se si scambiano x_0 con x_1 ed y_0 con y_1, ottenendo

$$\boxed{\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}} \qquad (**)$$

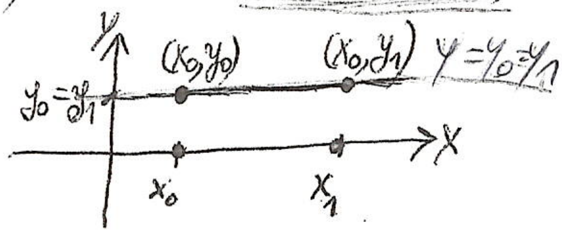
(che è la formula "classica").

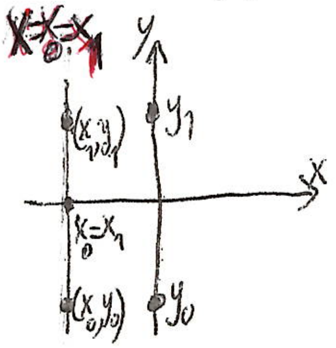
Nel nostro caso, $(x_0, y_0)=(-1,0)$, $(x_1, y_1)=(0,1)$, e da $(**)$ si ha

$$\frac{y-\cancel{0}}{1-\cancel{0}}=\frac{x-(-1)}{0-(-1)}, \text{ cioè } y=\frac{x+1}{1} \qquad \boxed{y=x+1}.$$

Si riottiene quindi lo stesso risultato.

Notiamo che qui abbiamo considerato $x_0 \neq x_1$ ed $y_0 \neq y_1$ (retta OBLIQUA). Se $y_0 = y_1$ (ma $x_0 \neq x_1$), la retta è <u>orizzontale</u>, e quindi l'equazione della retta passante per i punti (x_0, y_0) ed (x_1, y_1) è $\boxed{y=y_0=y_1}$.





Se invece $x_0=x_1$ (ma $y_0 \neq y_1$), la retta è <u>verticale</u>, e l'equazione della retta passante per i punti (x_0, y_0) ed (x_1, y_1) è $\boxed{x=x_0=x_1}$.

N.B.: Non può succedere che $x_0=x_1$ ed $y_0=y_1$ contemporaneamente, perché i punti (x_0, y_0) ed (x_1, y_1) devono essere <u>DISTINTI</u>.

Ora, fatta questa panoramica sulle rette, applichiamo le principali proprietà delle rette per risolvere le (dis)equazioni trigonometriche, usando sempre <u>uno stesso trucco</u> che si adatta <u>SEMPRE</u>.

DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

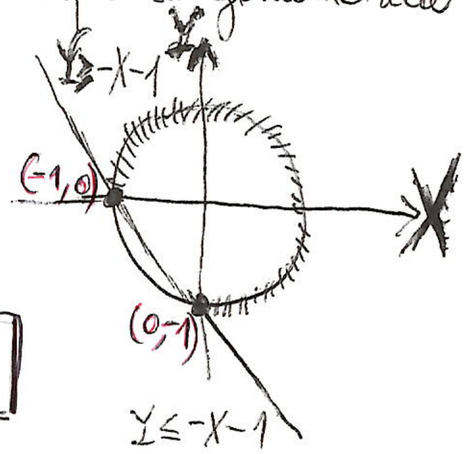
Risolvere la seguente disequazione trigonometrica:

$$\boxed{\sin x + \cos x \geq -1}$$

(oppure, $\boxed{\sin x \geq -1-\cos x}$)

TRUCCO: Considariamo la circonferenza goniometrica

$$X^2+Y^2=1$$



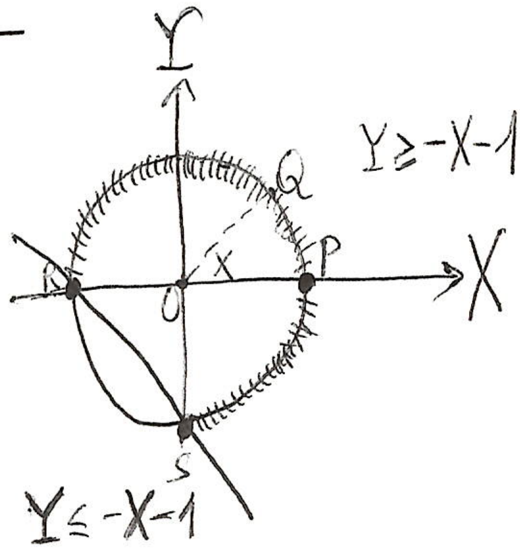
e poniamo $\begin{cases} X=\cos x \\ Y=\sin x \end{cases}$

La disequazione diventa $\boxed{Y+X\geq -1}$

oppure $\boxed{\begin{array}{c} Y\geq -1-X \\ (Y\geq -X-1) \end{array}}$, con la condizione

$\boxed{X^2+Y^2=1}$ (Condizione che va imposta SEMPRE, quando si risolvono le disequazioni trigonometriche con questo metodo)

Disegniamo la retta $Y=-X-1$. Notiamo che questa retta passa per il punto $(0,-1)$ (se sostituiamo X con 0, viene fuori $Y=-1$). Inoltre, se sostituiamo Y con 0, viene fuori $-X-1=0$, quindi $X=-1$, e quindi la retta passa per il punto $(-1,0)$. La retta $Y=-X-1$ divide il piano in due semipiani: $Y\geq -X-1$ (che è quello che ci interessa) ed $Y\leq -X-1$. Il semipiano $Y\geq -X-1$ sta a "nord-est" della retta $Y=-X-1$. Siccome ora dobbiamo tenere conto della condizione $X^2+Y^2=1$, le soluzioni della nostra disequazione saranno gli angoli x ai quali corrisponderanno i punti



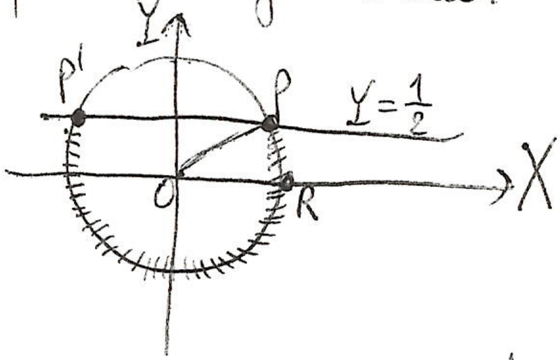
tratteggiati, cioè i punti che vanno da P ad R, e i punti che vanno a S a P.
Al punto P corrisponde $x=0$ (0 gradi, oppure 0 radianti); al punto R corrisponde $x=\pi$; al punto S corrisponde $x=\frac{3\pi}{2}$.
Quindi, se (in un primo momento) vogliamo considerare gli angoli che vanno da 0 a 2π, allora le soluzioni saranno date da $x \in [0, \pi] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.
Adesso però consideriamo tutti gli angoli possibili e immaginabili, tenendo conto della "periodicità": se infatti un punto generico Q della circonferenza goniometrica forma un angolo x con il semiasse positivo delle X, allora se si aggiunge $2k\pi$ ad x con $k \in \mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$ il corrispondente punto Q compie k giri di circonferenza (in senso antiorario se k è positivo, in senso orario se k è negativo) e si ritrova nella stessa posizione di prima. Quindi, se x è soluzione della disequazione, allora è soluzione anche $x+2k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
Pertanto le soluzioni della nostra disequazione saranno date da

$$x \in \left[2k\pi, \pi+2k\pi\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right], \text{ con } k \in \mathbb{Z}, \text{ cioè}$$

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi, \pi+2k\pi\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right]\right).$$

Risolvere la seguente disequazione trigonometrica:

$$\boxed{\sin x \leq \frac{1}{2}}$$



Come nell' esercizio precedente, consideriamo le coordinate $\begin{cases} X = \cos x \\ Y = \sin x \end{cases}$ e disegniamo la retta $Y = \frac{1}{2}$ e la circonferenza goniometrica $\boxed{X^2 + Y^2 = 1}$.

Questa retta incontra la circonferenza goniometrica in due punti P e P'. Pensiamo adesso ai valori fondamentali delle funzioni trigonometriche: il punto P corrisponde all' angolo x di $\frac{\pi}{6}$ (30°), mentre il punto P' corrisponde all' angolo x di 150° (180° − 30°), cioè $\frac{5\pi}{6}$ $\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ (RIPASSARE .....).

Le soluzioni della nostra disequazione sono gli angoli x ai quali corrispondono i punti della circonferenza goniometrica che vanno da R a P e da P' a R, cioè gli angoli

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$$ (se li consideriamo compresi fra 0 e 2π)

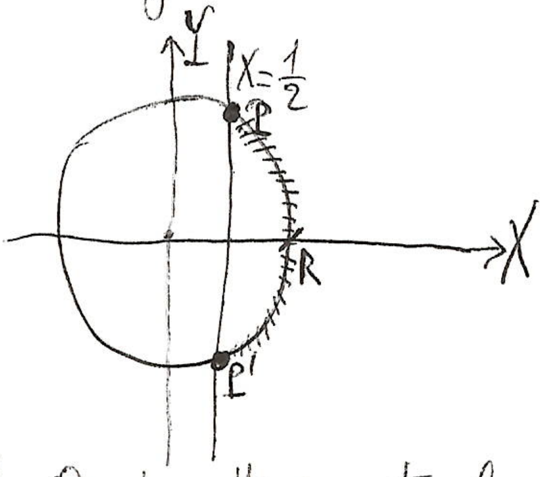
Tenendo conto della periodicità di 2π, procedendo analogamente come nell' esercizio precedente, si ha che le soluzioni sono date da

$$x \in \left[2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right]$$, con $k \in \mathbb{Z}$, cioè

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right] \right).$$

Risolvere la seguente disequazione trigonometrica:

$$\boxed{\cos x \geq \frac{1}{2}}.$$



Poniamo $\begin{cases} X = \cos x \\ Y = \sin x \end{cases}$

e disegniamo la retta $X = \frac{1}{2}$ e la circonferenza goniometrica $X^2 + Y^2 = 1$. Questa retta incontra la circonferenza goniometrica in due punti P e P'. Consideriamo ora i valori fondamentali delle funzioni trigonometriche: il punto P corrisponde all' angolo x di $\frac{\pi}{3}$ (60°), mentre il punto P' corrisponde all'angolo x di $\frac{5}{3}\pi$ (300°) (che poi è "equivalente" all' angolo di $-\frac{\pi}{3}$ (−60°)) (ripassare...).

Le soluzioni della disequazione sono gli angoli x ai quali corrispondono i punti della circonferenza goniometrica che vanno da R a P e da P' a R, cioè gli angoli

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right] \quad \text{(se presi fra 0 e } 2\pi\text{)}.$$

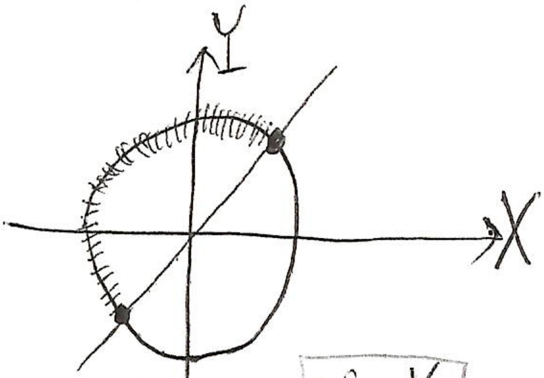
Tenendo conto della periodicità di 2π, otteniamo che le soluzioni, nella loro totalità, sono espresse da

$$x \in \left[2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5}{3}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right] \text{ con } k \in \mathbb{Z},$$

cioè $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5}{3}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right] \right)$.

Risolvere la seguente disequazione trigonometrica:

$\boxed{\sin x \geq \cos x}$



TRUCCO: Consideriamo la circonferenza goniometrica $X^2+Y^2=1$ e poniamo $\begin{cases} X=\cos x \\ Y=\sin x \end{cases}$ La disequazione diventa $\boxed{Y \geq X}$

(con la condizione $\boxed{X^2+Y^2=1}$, che va sempre posta)

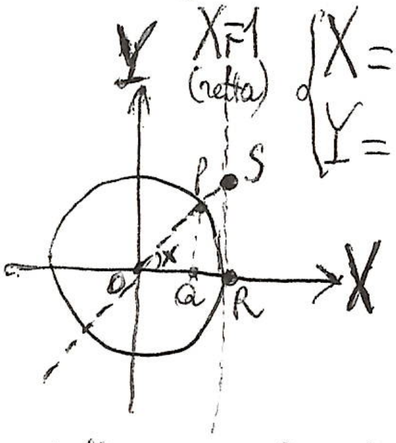
Disegniamo la retta $Y=X$: questa retta è la bisettrice del I e III Quadrante, e divide il piano nei semipiani $Y \geq X$ (che è quello che ci interessa) ed $Y \leq X$. Siccome nel nostro caso $Y \geq X$ (perché $\sin x \geq \cos x$), le soluzioni sono quegli angoli x che corrispondono al semipiano "nord-ovest" rispetto alla retta $Y=X$, cioè gli angoli x compresi fra $\frac{\pi}{4}$ e $\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$ (Notiamo che $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, mentre $\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)=\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, ripassare i valori fondamentali delle funzioni trigonometriche...). Quindi, se (in un primo momento) si prendono gli angoli che vanno da 0 a 2π, le soluzioni della disequazione sono date da $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$. Tenendo conto della periodicità di 2π, la totalità delle soluzioni è data da

$$x \in \left[\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5}{4}\pi+2k\pi\right] \text{ con } k \in \mathbb{Z}, \text{ cioè}$$

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5}{4}\pi+2k\pi\right]\right).$$

Risolvere la seguente disequazione trigonometrica:

$\boxed{tg\, x \geq 1}$



$\begin{cases} X = \cos x \\ Y = \sin x \end{cases}$

Consideriamo la circonferenza goniometrica. I triangoli OPQ ed ORS sono SIMILI (perché tutti i tre angoli sono uguali: infatti sono x, $90°$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e, per differenza, $90°-x$ $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$), e quindi i lati sono IN PROPORZIONE, da cui

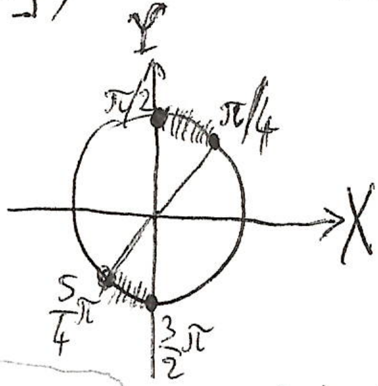
$$\boxed{tg\, x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{QP}{OQ} = \frac{RS}{OR} = \frac{RS}{1} = \boxed{RS}$$ (N.B.: OR = 1 perché è il raggio della circonferenza goniometrica)

(Ecco dunque il significato geometrico della funzione tangente sulla circonferenza goniometrica)

Alla disequazione data associamo l'equazione $tg\, x = 1$. Se si impone $tg\, x = 1$, cioè $RS = 1$, allora il triangolo ORS è rettangolo isoscele, perché $OR = 1$, e quindi $x = 45° = \frac{\pi}{4}$. Quindi, se si considera l'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, i valori x per cui $RS \geq 1$ sono $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. A questo punto teniamo conto della periodicità della funzione tangente: la tangente è una funzione periodica di periodo π.

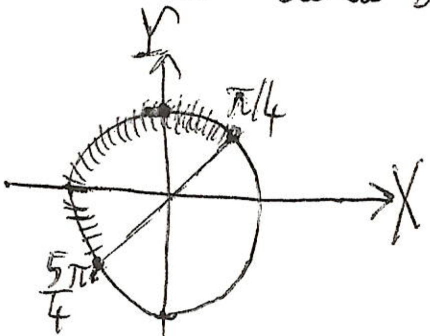
La soluzione complessiva è data da $x \in \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ con $k \in \mathbb{Z}$, cioè $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\right)$.

Se si considera l' intervallo $[0, 2\pi]$, le soluzioni della disequazione $\boxed{tg\, x \geq 1}$ sono date da



$$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$$

mentre abbiamo detto che
le soluzioni della disequazione $\boxed{\sin x \geq \cos x}$ sono date da



$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$, e <u>non</u> coincidono con le soluzioni della disequazione $\boxed{tg\, x \geq 1}$.

Infatti, è pur vero che $\frac{\sin x}{\cos x} = tg\, x$ (dove ha senso) e $\frac{\cos x}{\cos x} = 1$, ma da $\sin x \geq \cos x$, dividendo per $\cos x$ entrambi i membri, <u>non</u> è detto che si ottiene $\frac{\sin x}{\cos x} \geq \frac{\cos x}{\cos x}$ (perché <u>NON È DETTO CHE</u> $\cos x$ sia sempre <u>positivo</u>!!!)

Risolvere la seguente disequazione trigonometrica:

$$|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

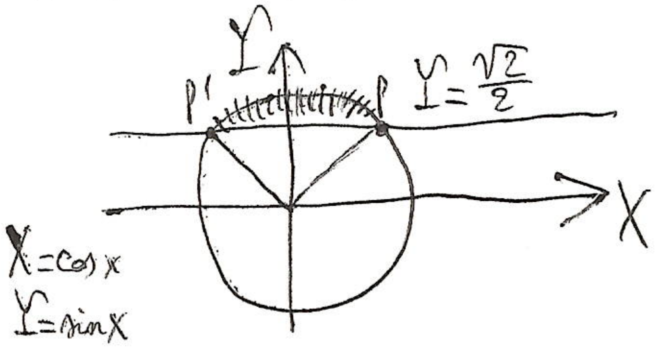
Osserviamo che $|\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{se } \sin x \geq 0 \quad \mathrm{I)} \\ -\sin x & \text{se } \sin x \leq 0 \quad \mathrm{II)} \end{cases}$

(non se $x \geq 0$ o se $x \leq 0$: sarebbe errore grave)

Distinguiamo i due casi I) e II)

Caso I) Ponendo $\sin x \geq 0$, la disequazione diventa

I) $\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, cioè $\boxed{\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}}$ (perché, se $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, allora automaticamente $\sin x \geq 0$, e quindi la disequazione $\sin x \geq 0$ diventa superflua)



A $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ corrispondono i valori $x = \frac{\pi}{4}$ ed $x = \frac{3\pi}{4}$ (cioè $45°$ e $135°$), a cui corrispondono rispettivamente i punti P e P' della circonferenza goniometrica che intersecano la retta $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

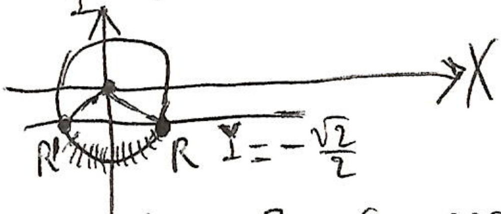
Considerando (per ora) gli angoli $x \in [0, 2\pi]$, le soluzioni del caso I) sono date dai punti $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

(P.S.: Ripassare la tabella dei valori fondamentali delle funzioni trigonometriche...)

Caso II) Ponendo $\sin x \leq 0$, la disequazione diventa

$$\text{II)}\begin{cases} \sin x \leq 0 \\ -\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{cioè} \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ \sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{cioè}$$

$\boxed{\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}}$ (perché, se $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, allora automaticamente $\sin x \leq 0$, e quindi la disequazione $\sin x \leq 0$ diventa superflua)



A $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

corrispondono i valori $x = \frac{5}{4}\pi$ ed $x = \frac{7}{4}\pi$ (cioè 225° e 315°), a cui corrispondono rispettivamente i punti R ed R' della circonferenza goniometrica che intersecano la retta $Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

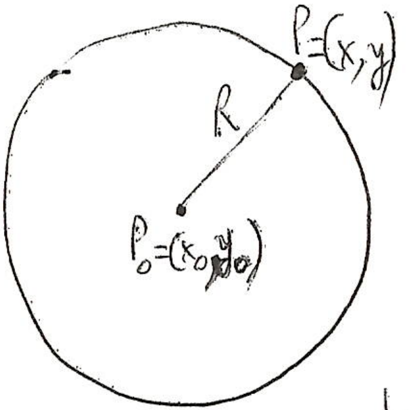
Considerando (per ora) gli angoli $x \in [0, 2\pi]$, le soluzioni del caso II) sono date dai punti $x \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$

(Rivedere la tabella dei valori fondamentali delle funzioni trigonometriche...)

Complessivamente, e tenendo conto anche della periodicità di 2π (stiamo studiando la funzione seno), la totalità delle soluzioni della disequazione data $|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ è costituita da $x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5}{4}\pi + 2k\pi, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$,

ossia $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5}{4}\pi + 2k\pi, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right] \right)$

EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA



Nel piano cartesiano, la circonferenza è il luogo dei punti del piano $P=(x,y)$ equidistanti (cioè, aventi la stessa distanza) da un punto fisso $P_0=(x_0,y_0)$. Il punto P_0 si chiama <u>CENTRO</u>, e la distanza (R) si chiama <u>RAGGIO</u>.

Si ha: $\mathrm{dist}((x,y),(x_0,y_0))=R$, cioè $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$, da cui $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2}$ (ricordare il teorema di Pitagora), ossia

$x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2=R^2$, e quindi

$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-R^2=0$, ottenendo

$x^2+y^2+ax+by+c=0$. Visto che i coefficienti corrispondenti devono essere uguali, si ha: $a=-2x_0$, $b=-2y_0$, $c=x_0^2+y_0^2-R^2$

Quindi, dati il centro e il raggio della circonferenza, si riesce a scrivere la formula

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$

(notare che MANCA IL TERMINE IN xy).

Viceversa, data l' equazione

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}, \qquad (*)$$

vediamo se e quando quest' equazione è VERAMENTE l' equazione di una circonferenza, e in caso affermativo determiniamo il centro e il raggio.

Se vogliamo avere centro e raggio, riconduciamo l' equazione $(*)$ a un' equazione del tipo

$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$, cioè $\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - R^2 = 0}$

Abbiamo visto che $a = -2x_0$, $b = -2y_0$, $c = x_0^2 + y_0^2 - R^2$, quindi $x_0 = -\frac{a}{2}$, $y_0 = -\frac{b}{2}$, $R^2 = x_0^2 + y_0^2 - c = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$

Allora, per essere veramente l' equazione di una circonferenza, R^2 dev' essere positivo, cioè $\boxed{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0}$

se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 0$, allora otteniamo $R^2 = 0$, quindi $R = 0$, ottenendo l' equazione di un punto e non di una vera e propia circonferenza; se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c < 0$, allora, nel campo dei numeri reali, otteniamo $\emptyset$ (insieme vuoto).

Esempio: Studiamo l' equazione

$$\boxed{x^2+y^2-2x+4y=0}:$$

è veramente l'equazione di una circonferenza? E se sì, determiniamo centro e raggio.

<u>TRUCCO</u>: Poniamo $x^2+y^2-2x+4y=(x-x_0)^2+$ $+(y-y_0)^2-R^2$. Si ha:

$$x^2+y^2\underline{-2x}+4y=x^2\underline{-2xx_0}+x_0^2+y^2-2yy_0+y_0^2-R^2.$$

Uguagliando i rispettivi coefficienti, si ottiene

$-2=-2x_0$, $4=-2y_0$, $x_0^2+y_0^2-R^2=0$, da cui

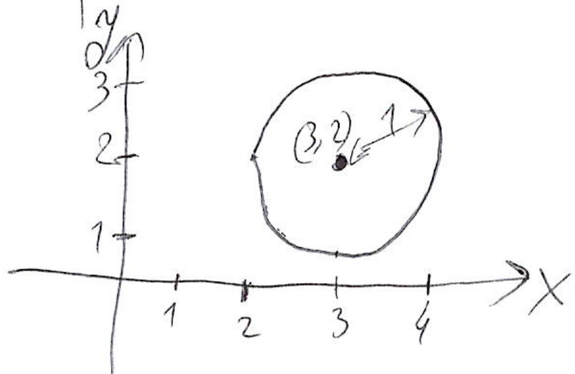
$x_0=1$, $y_0=-2$, $1+(-2)^2-R^2=0$, $1+4-R^2=0$, $R^2=5$, $R=\sqrt{5}$

Pertanto, le coordinate del centro sono $(1,-2)$, mentre il raggio è $\sqrt{5}$, numero POSITIVO. Si tratta quindi di <u>una vera e propria circonferenza</u>.

Naturalmente, il procedimento illustrato permette di NON IMPARARE LE FORMULE A MEMORIA, ma di "VEDERE QUELLO CHE CI STA DIETRO".

ESERCIZIO -55-

Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $(3,2)$ e raggio 1.



Applichiamo la formula "iniziale"

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ che

deriva dalla definizione di circonferenza come luogo dei punti equidistanti da un punto fisso (detto centro) e dal teorema di Pitagora.

Nel nostro esercizio, si ha: $x_0=3$, $y_0=2$, $R=1$. Si ottiene $(x-3)^2+(y-2)^2=1$. Sviluppando i quadrati, si ha

$x^2-6x+9+y^2-4y+4-1=0$, cioè

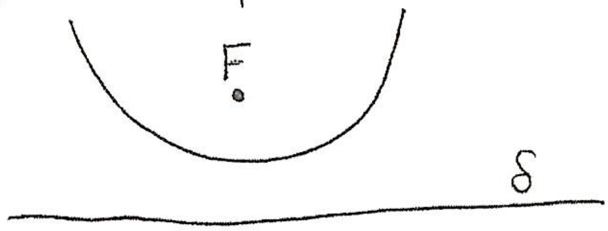
$$\boxed{x^2+y^2-6x-4y+12=0}$$

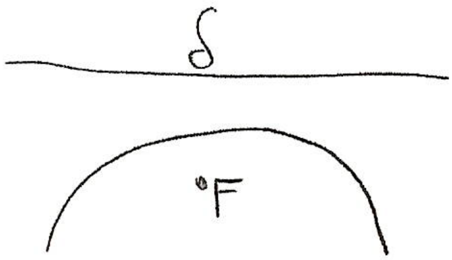
che è per l'appunto l'equazione della circonferenza data.

EQUAZIONE DELLA PARABOLA

La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto F, detto FUOCO, e da una retta δ, detta <u>direttrice</u>.

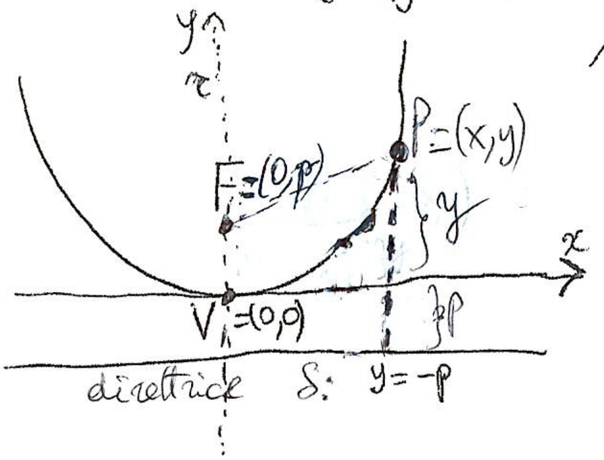
Visto che stiamo considerando dal punto di vista della <u>Geometria Analitica</u>, supporremo, per semplificare le idee, che la direttrice δ sia parallela all'asse delle x (cioè orizzontale). Inoltre supporremo, senza perdita di generalità, che – nel nostro sistema di riferimento – la direttrice abbia ordinata inferiore al fuoco, cioè stia più in giù rispetto a F





È analogo il caso opposto in cui la direttrice sta al di sopra del fuoco, che comunque non tratteremo nei dettagli.

Adesso congiungiamo, a partire dal fuoco F, la retta r perpendicolare alla direttrice δ: questa retta incontrerà la nostra parabola in un punto V, che chiameremo vertice.



Step 1) Dapprima consideriamo il caso in cui il vertice V sia esattamente l'origine $(0,0)$ degli assi coordinati (cioè fissiamo il sistema di riferimento degli assi cartesiani proprio in questo modo). Le coordinate del fuoco saranno allora $(0,p)$ e l'equazione della direttrice sarà $y=-p$: infatti il vertice V APPARTIENE ALLA PARABOLA, la sua distanza dal fuoco è p, e quindi l'equazione della direttrice è necessariamente $y=-p$, perché p dev'essere anche la distanza del vertice dalla direttrice.
Notiamo che $p>0$.
Se prendiamo un qualsiasi punto P della parabola, $P=(x,y)$, notiamo che la distanza di P dalla direttrice è $y+p$, mentre la distanza di P dal fuoco è $\sqrt{x^2+(y-p)^2}$.
Pertanto un punto del piano $P=(x,y)$ appartiene alla parabola se e solo se $y+p=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$, cioè $(y+p)^2=x^2+(y-p)^2$, ossia $\cancel{y^2}+2py+\cancel{p^2}=x^2+\cancel{y^2}-2py+\cancel{p^2}$

$x^2=4py$ $\boxed{y=\frac{1}{4p}x^2}$

Quindi, quando il vertice è $(0,0)$, e la direttrice sta <u>sotto</u> la parabola (e quindi la parabola rivolge la concavità verso l'alto $\smile$), l'equazione della nostra parabola è

$$\boxed{y = \frac{1}{4p} x^2}, \text{ con } p > 0.$$

Nel caso generale, siano (x_0, y_0) le coordinate del vertice. Se noi facciamo un cambiamento di coordinate (poniamo $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$), allora, nelle nuove coordinate X ed Y, il vertice viene ad assumere le coordinate $(0,0)$, e quindi l'equazione della parabola è

$$y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2,$$

cioè

$$y = \frac{1}{4p}(x^2 - 2x_0 x + x_0^2) + y_0$$

ossia

$$y = \frac{1}{4p}x^2 - \frac{x_0}{2p}x + \frac{1}{4p}x_0^2 + y_0$$

Quindi si avrà un'espressione del tipo $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$, con $a = \frac{1}{4p}$ $b = -\frac{x_0}{2p}$ $c = a x_0^2 + y_0$, da cui

$p = \frac{1}{4a}$, $b = -\frac{x_0}{\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_2 a}} = -2a x_0$ $\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$. Quindi

(Notiamo che $\boxed{a > 0}$, poiché $p > 0$)

$\boxed{x_0 = -\dfrac{b}{2a}}$ è l'espressione dell'ascissa del vertice della parabola. Ricaviamoci l'ordinata y_0.

Si ha: $c = a x_0^2 + y_0$, e quindi $\boxed{y_0} = c - a x_0^2 =$

$$= c - a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - \cancel{a}\frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \boxed{-\frac{\Delta}{4a}},$$

ove con Δ (discriminante) si indica la quantità $b^2 - 4ac$. Le coordinate del vertice sono quindi

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Nel caso in cui $V = (0, 0)$, le coordinate del fuoco sono $(0, p)$; ciò vuol dire che l'ascissa del vertice RESTA INVARIATA, mentre l'ordinata del vertice AUMENTA di p, cioè di $\frac{1}{4a}$. Pertanto, nel caso generale, le coordinate del fuoco sono

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a}\right)$$

L'ordinata che rappresenta la direttrice, rispetto all'ordinata del vertice, DIMINUISCE di p, cioè di $\frac{1}{4a}$.

Pertanto, nel caso generale, l'equazione della direttrice è

$$\delta: \boxed{y} = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a} = \boxed{-\frac{(1+\Delta)}{4a}}$$

Viceversa, sia $y=ax^2+bx+c$ un trinomio di secondo grado, con $a\neq 0$ (senza restrizione, $a>0$).
Allora possiamo scrivere, intanto,

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

Notiamo che, innanzi tutto, abbiamo visto che $y=ax^2$ è l'equazione di una parabola con il vertice nel punto $(0,0)$, il fuoco nel punto $(0,p)$ e la direttrice di equazione $y=-p$, ove $p=\frac{1}{4a}$.
Si può vedere (intuitivamente...), tramite opportune "traslazioni", ~~che~~ se h e k sono due numeri reali qualsiasi, allora anche $y=x^2+k$ è l'equazione di una parabola, come pure lo è $y=(x+h)^2+k$, ed anche, quindi, $y=a\left[(x+h)^2+k\right]$.
Si può vedere anche che, comunque presi tre numeri reali a,b,c con $a\neq 0$ (nel nostro caso $a>0$, senza restrizione) esistono h e k reali tali che

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x+h)^2+k$$

e quindi

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[(x+h)^2+k\right],$$

e dunque l'equazione $y=ax^2+bx+c$ risulta essere effettivamente l'equazione di una parabola.

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Adesso studiamo l' equazione di secondo grado

$$ax^2+bx+c=0\ ,\quad \text{con } a\neq 0.$$

Quindi la nostra equazione si scrive anche

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0\ ,\quad \text{da cui}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,\ \text{ovvero}\ (x+h)^2+k=0,$$

se h e k sono due numeri reali tali che

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x+h)^2+k$$

Intanto, troviamo h e k in funzione di a, b e c. Si ha

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2+2hx+h^2+k$$

Per il principio di identità dei polinomi, i rispettivi coefficienti della x e i rispettivi termini noti devono essere UGUALI, ottenendo

$$\frac{b}{a}=2h\ ,\quad \text{cioè}\quad \boxed{h=\frac{b}{2a}}$$

$$\frac{c}{a}=h^2+k\ ,\ \text{ossia}\ \frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}+k\ ,\ \text{da cui}$$

$$k=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\boxed{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}=-\frac{\Delta}{4a^2}\ ,\ \text{ove}\ \Delta=b^2-4ac$$

Abbiamo detto che studiare l' equazione data è equivalente a risolvere l' equazione $(x+h)^2+k=0$, cioè $(x+h)^2=-k$. Questa equazione, se $k>0$, cioè $-\frac{\Delta}{4a^2}>0$, ossia $\underline{\Delta<0}$, non ammette soluzioni reali, perché si ha: $-k<0$ ed $(x+h)^2$ non può essere uguale a un numero negativo.

Se $k=0$, si ha $(x+h)^2=0 \overset{\text{se e}}{\underset{\text{solo se}}{\Longleftrightarrow}} x+h=0 \Leftrightarrow \boxed{x}=-h=\boxed{-\frac{b}{2a}}$, unica soluzione.
(cioè $\underline{\Delta=0}$)

Studiamo ora l'equazione

$(x+h)^2=-k$, con $k<0$, ove $k=-\frac{\Delta}{4a^2}=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, $h=\frac{b}{2a}$

Allora $-k>0$, ove $-k=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{\Delta}{4a^2}$.

Siamo dunque nel caso $\underline{\Delta>0}$. Si ha

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \text{e quindi}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \text{da cui}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ottenendo due soluzioni $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

$x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

RICAPITOLANDO!

$\Delta>0$: due soluzioni reali distinte $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\Delta=0$: una sola soluzione reale, o due soluzioni reali coincidenti $x_0=-\frac{b}{2a}$

$\Delta<0$: NESSUNA SOLUZIONE REALE

Esempi: 1) $x^2-4x+3=0$ $a=1$ $b=-4$ $c=3$ $-b=4$

$\Delta=b^2-4ac=16-12=4>0$, quindi abbiamo le soluzioni

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=$ $\nearrow \frac{2}{2}=\boxed{1}$, $\searrow \frac{6}{2}=\boxed{3}$ Le soluzioni sono quindi $\boxed{x_1=1}$ ed $\boxed{x_2=3}$.

2) $x^2-x+9=0$ $a=1$ $b=-1$ $c=9$ $(-b=1)$ $\Delta=b^2-4ac=1-36=-35<0$, quindi questa equazione non ammette nessuna soluzione reale

3) $x^2+6x+9=0$ $a=1$ $b=6$ $c=9$ $\Delta=b^2-4ac=36-36=0$ e quindi l'unica soluzione reale è $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2}=-3$ $\boxed{x_0=-3}$.

Consideriamo ora le $\boxed{\text{disequazioni di } 2^\circ \text{ grado}}$, del tipo

$ax^2+bx+c>0$ (oppure ≥ 0, oppure <0, oppure ≤ 0)

Vediamo dapprima il caso $\boxed{a>0}$. Ricordiamo la formula

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

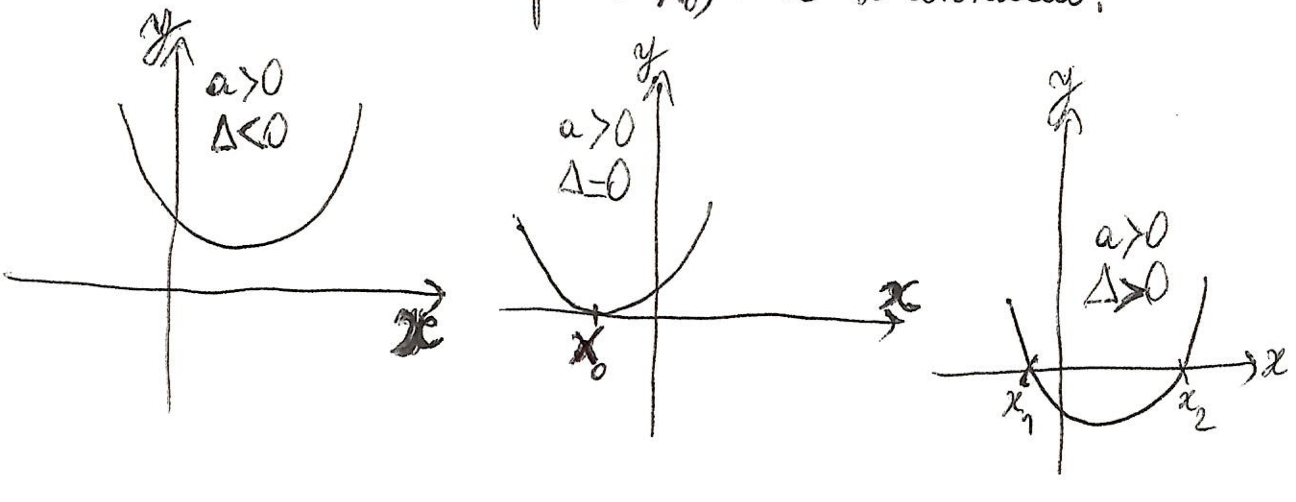
dell'equazione $ax^2+bx+c=0$

Sia $\Delta=b^2-4ac$. SI VEDE GRAFICAMENTE CHE:

Se $\Delta<0$, il trinomio non ammette nessuna radice reale, ed assume sempre valori POSITIVI.

Se $\Delta>0$, il trinomio ha due radici reali e distinte x_1, x_2, assume segno positivo per valori esterni e negativo per valori interni.

Se $\Delta=0$, il trinomio ha due radici reali coincidenti (diciamo x_0), e ammette segno positivo per tutti gli x reali ad eccezione che nel punto x_0, dove si annulla.



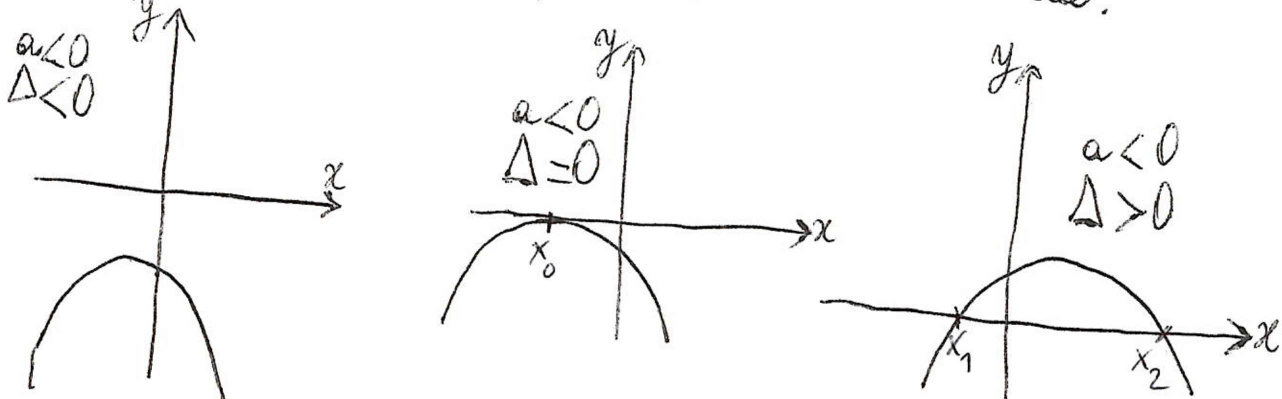
Vediamo ora il caso $a<0$ (anche se può essere ricondotto al caso $a>0$, cambiando i segni (cioè moltiplicando per -1) e invertendo i versi delle disequazioni)

Sia $\Delta = b^2 - 4ac$. SI VEDE GRAFICAMENTE CHE:

Se $\Delta < 0$, il trinomio non ammette nessuna radice reale, ed assume sempre valori NEGATIVI.

Se $\Delta > 0$, il trinomio ha due radici reali distinte x_1, x_2, assume segno negativo per valori esterni e positivo per valori interni.

Se $\Delta = 0$, il trinomio ha due radici reali coincidenti (diciamo x_0), e assume valori negativi per tutti gli x reali tranne che nel punto x_0, dove si annulla.



Esempio: $x^2 - 9x + 14$ $\quad a=1 \quad b=-9 \quad c=14$

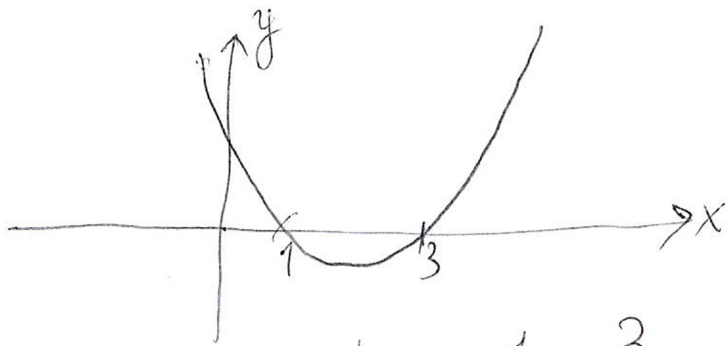
$\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 56 = 25 > 0$ $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9 \pm 5}{2} = \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases}$

Quindi il trinomio si annulla nei punti 2 e 7, è positivo in $]-\infty, 2[$, è positivo in $]7, +\infty[$ (VALORI ESTERNI) ed è negativo in $]2, 7[$ (VALORI INTERNI).

ESEMPI

1) $x^2-4x+3>0$ Abbiamo visto: $a>0$, $\Delta>0$,

$x_1=1$, $x_2=3$



La nostra funzione $y=y(x)=x^2-4x+3$ assume valori positivi per valori esterni all'intervallo di estremi 1 e 3 (estremi esclusi, perché la nostra funzione si annulla nei punti 1 e 3). Quindi l'insieme delle soluzioni è dato da

$$x<1 \quad \text{oppure} \quad x>3$$

che si scrive anche

$$x\in\,]-\infty,1[\, \cup\,]3,+\infty[$$

2) $x^2-4x+3\le 0$. Questa volta, procedendo analogamente come nell'esempio precedente, dalla figura si vede che bisogna prendere valori compresi tra 1 e 3 (valori interni): questa volta, ESTREMI INCLUSI, perché la nostra disequazione è formulata con il ≤ 0 (quindi è contemplato anche il caso in cui la nostra funzione "parabola" si annulla, cosa che succede nei punti 1 e 3. Pertanto l'insieme delle soluzioni è dato da $\boxed{1\le x\le 3}$, cioè $x\in[1,3]$.

2bis) Se la disequazione fosse stata $x^2-4x+3<0$, allora l'insieme delle soluzioni sarebbe stato $1<x<3$, cioè $x\in\,]1,3[$ (perché in tal caso i punti 1 e 3 si dovevano escludere, in quanto la funzione si annulla nei punti 1 e 3 e la disequazione è formulata con il segno <0, e quindi il caso $=0$ si deve escludere).

3) $x^2 - x + 9 \leq 0$. In questo caso (come abbiamo detto in precedenza) si ha: $a > 0$, $\Delta < 0$. In questo caso, il trinomio $x^2 - x + 9$ assume sempre valori positivi. Pertanto, non può mai succedere che $x^2 - x + 9 \leq 0$, essendo sempre $x^2 - x + 9 > 0$ (per ogni numero reale x)

4) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$. In questo caso (come abbiamo detto in precedenza) si ha: $a > 0$, $\Delta = 0$. Dunque, il trinomio $x^2 + 6x + 9$ assume sempre valori positivi ad eccezione del punto $x_0 = -3$, dove il trinomio si annulla. Guardando il testo preciso della disequazione, si vede che le soluzioni sono date dall'unione insiemistica dei punti x per i quali $x^2 + 6x + 9 < 0$ e dei punti x per i quali $x^2 + 6x + 9 = 0$. Ma, come abbiamo detto, la situazione $x^2 + 6x + 9 < 0$ non si verifica mai, mentre il caso $x^2 + 6x + 9 = 0$ si verifica solamente nel punto $x = x_0 = -3$. Pertanto, complessivamente, si ottiene che l'unica soluzione della nostra disequazione è data dal punto $\boxed{x = -3}$.

4 bis) Se la disequazione fosse stata $x^2 + 6x + 9 > 0$, allora l'insieme delle soluzioni sarebbe stato tutto l'insieme dei numeri reali tranne il punto -3, cioè l'insieme $x \in]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$, vale a dire $x \neq -3$, cioè $[x < -3$ oppure $x > -3]$ (Il punto -3 è da escludere dal caso $x^2 + 6x + 9 > 0$, perché in quel punto (-3) la funzione $x^2 + 6x + 9$ si ANNULLA).

4 ter) Se invece la disequazione fosse stata $x^2 + 6x + 9 \geq 0$, allora l'insieme delle soluzioni sarebbe stato TUTTO L'INSIEME

dei numeri reali (per ogni $x \in \mathbb{R}$), perché comunque la nostra funzione x^2+6x+9 è COMUNQUE SEMPRE POSITIVA o NULLA). Per questo stesso motivo, si ha che la disequazione $x^2+6x+9<0$ non ammette nessuna soluzione reale (il nostro trinomio non è mai negativo).

Le disequazioni di secondo grado si usano spessissimo (anche) per risolvere altri tipi di disequazioni, e costituiscono - diciamo - una specie di "base".

COME SI RISOLVE UNA DISEQUAZIONE FRATTA?

(Per esempio, una disequazione del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)} < \frac{R(x)}{S(x)}$)

Notiamo che, in generale, non si può fare il "prodotto a croce" (cioè $P(x)\,S(x) < R(x)\,Q(x)$). Questo si può fare solamente se $Q(x)$ ed $S(x)$ sono positivi. Altrimenti bisognerebbe considerare diversi casi, e distinguere gli x dove $Q(x)$ ed $S(x)$ sono tutti e due positivi, o tutti e due negativi, oppure uno positivo e l'altro negativo: perché, se si moltiplicano entrambi i termini di una disuguaglianza per un numero positivo, la disuguaglianza non cambia di segno, ma se si moltiplicano i termini di una disu= guaglianza per un numero negativo, allora la disugua= glianza CAMBIA DI SEGNO. Allora si procede in questo modo:

1) Si pone $Q(x) \neq 0$ ed $S(x) \neq 0$
(perché <u>NON</u> <u>SI</u> <u>PUÒ</u> dividere per zero)

2) Si scrive $\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{R(x)}{S(x)} < 0$, cioè

$$V(x) = \frac{P(x) \cdot S(x) - R(x) \cdot Q(x)}{Q(x) \cdot S(x)} < 0$$

3) Si studia (DA SOLO) il segno del <u>numeratore</u>

$$N(x) = P(x) \cdot S(x) - R(x) \cdot Q(x)$$

e si individuano le zone (di solito, intervalli o semirette) dove $N(x)$ è positivo, o negativo, o nullo.

4) Si studia (DA SOLO) il segno del <u>denominatore</u>

$$D(x) = Q(x) \cdot S(x)$$

e si individuano le zone dove $D(x)$ è positivo o negativo.

5) Si fa un <u>diagramma</u>, si applica la REGOLA DEI SEGNI e in base a ciò si individuano gli intervalli o semirette in cui $V(x) < 0$, cioè $\dfrac{N(x)}{D(x)} < 0$. Queste zone, cioè i punti x tali che $V(x) < 0$, sono la <u>soluzione</u> della disequazione data.
<u>N.B.</u>: il segno $<$ in $V(x) < 0$ corrisponde al segno <u>dato nell' esercizio</u>. Per esempio, se la disequazione di partenza fosse stata $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq \dfrac{R(x)}{S(x)}$, allora

la soluzione sarebbe stata data dai punti x tali che $V(x) \geq 0$.

[N.B.: In tutto ciò, abbiamo escluso A PRIORI i punti x tali che $Q(x) = 0$ oppure $S(x) = 0$]

DISEQUAZIONI FRATTE

$$\frac{3}{x-2} < \frac{2x}{3+x}$$

Innanzi tutto notiamo che, affinché quello che c'è scritto abbia senso, dev'essere $x \neq 2$ ed $x \neq -3$ (perché non si può dividere per 0).

Notiamo che $x-2$ e $3+x$ non è detto che siano sempre positive, e quindi – in generale – <u>non</u> si può fare il "prodotto a croce". Procediamo allora nel seguente modo:

$$\frac{3}{x-2} - \frac{2x}{3+x} < 0 \Leftrightarrow$$ (vuol dire "se e solo se")

$$\frac{3(3+x)-2x(x-2)}{(x-2)\cdot(3+x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{9+3x-2x^2+4x}{(x-2)\cdot(3+x)} < 0 \Leftrightarrow$$

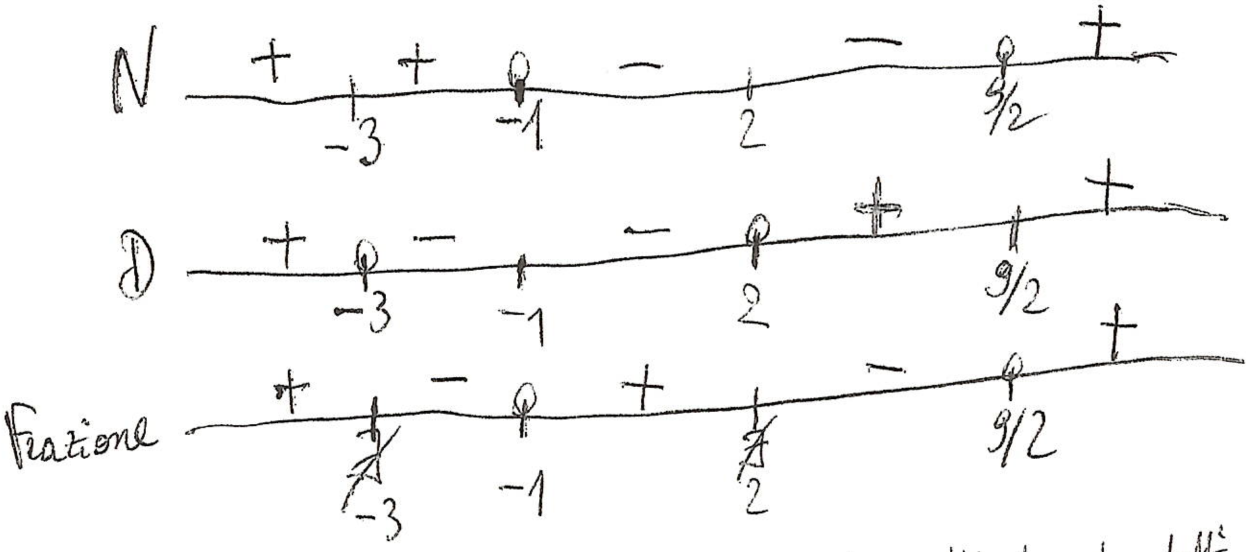
$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2+7x+9}{(x-2)\cdot(3+x)} < 0 \Leftrightarrow$$ (moltiplicando per -1 e cambiando il verso)

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-7x-9}{(x-2)\cdot(3+x)} > 0.$$ Studiamo ora <u>separatamente</u> il numeratore (N) e il denominatore (D).

N: risolviamo l'equazione di 2° grado $2x^2-7x-9=0$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{7 \pm 11}{4} \begin{matrix} \nearrow 9/2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

N è positivo per valori esterni a $\left[-1, \frac{9}{2}\right]$ e negativo per valori interni. D: le radici sono 2 e -3, quindi D è positivo per valori esterni a $[-3, 2]$ e negativo per valori interni.



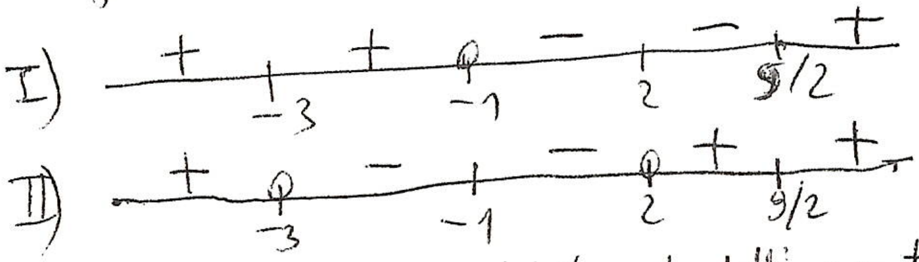
La soluzione della disequazione è costituita da tutti e soli i punti dove la frazione è positiva, cioè per

$x \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]-1, 2\right[\cup \left]\frac{9}{2}, +\infty\right[$.

Studiare il seguente <u>SISTEMA</u>

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x - 9 > 0 & \text{I)} \\ (x-2)\cdot(3+x) > 0 & \text{II)} \end{cases}$$

Abbiamo già studiato le due disequazioni I) e II), ottenendo



La soluzione del sistema è costituita da tutti i punti in cui I) e II) SONO CONTEMPORANEAMENTE POSITIVE, cioè

$\left]-\infty, -3\right[\cup \left]\frac{9}{2}, +\infty\right[$.

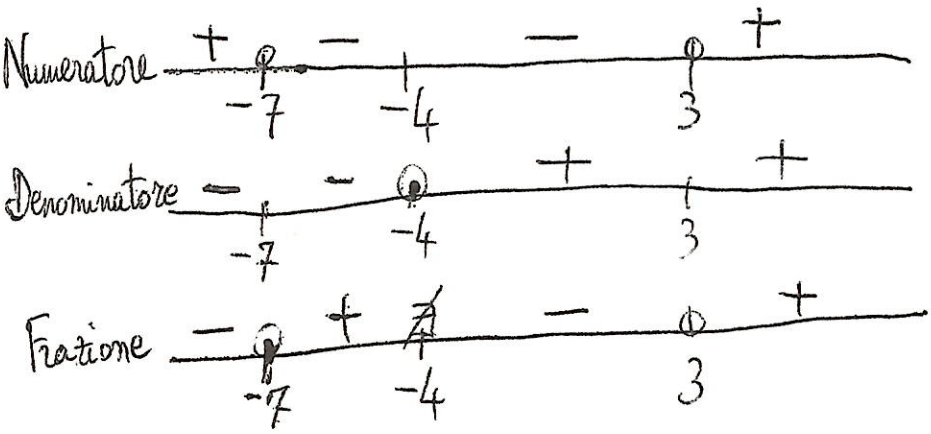
Esercizio: Risolvere la seguente disequazione fratta

$$\frac{x^2+4x-21}{x+4} \leq 0$$

Per studiare il segno del numeratore, risolviamo l'equazione $x^2+4x-21=0$. Si ha

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow -7 \end{array}$$

(positivo per valori esterni; negativo per valori interni)



Quindi la soluzione della disequazione è

$x \leq -7$ oppure $-4 < x \leq 3$, cioè

$x \in \,]-\infty, -7] \cup \,]-4, 3]$.

Risolvere la seguente disequazione:

$$\boxed{\frac{1}{x}>4}$$

ATTENZIONE! A priori, non si può direttamente moltiplicare subito per x, perché non conosciamo il segno. Allora poniamo

$\boxed{\frac{1}{x}-4>0}$, che diventa $\frac{1}{x}-\frac{4x}{x}>0$,

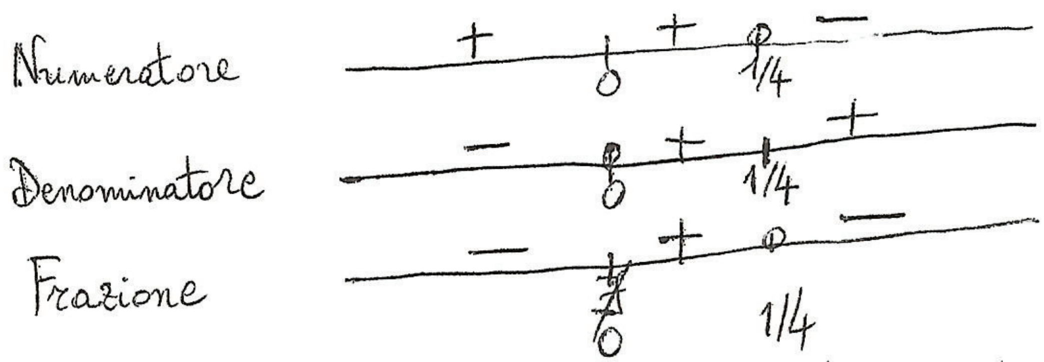
$\boxed{\frac{1-4x}{x}>0}$. Studiamo dapprima il segno del numeratore. Si ha:

$$1-4x>0 \iff 4x<1 \iff x<\frac{1}{4}$$

(se e solo se)

$$1-4x=0 \iff 4x=1 \iff x=\frac{1}{4}$$

$$1-4x<0 \iff 4x>1 \iff x>\frac{1}{4}$$



Quindi la soluzione della nostra disequazione è

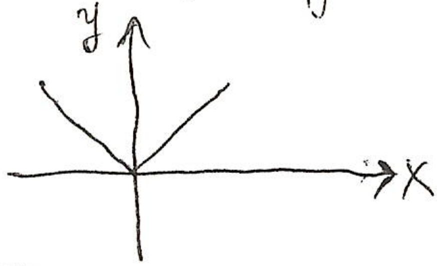
$\boxed{0<x<\frac{1}{4}}$, cioè $x\in\left]0,\frac{1}{4}\right[$.

Si poteva risolvere la disequazione $\frac{1}{x}>4$ anche così: Per $x=0$ non ha senso. Per $x<0$, non ci sono soluzioni, perché in tal caso sarebbe $\frac{1}{x}<0$, ma sappiamo che $\frac{1}{x}>4$ che è positivo. Resta il caso $\underline{x>0}$. Passando ai reciproci, si ha $x<\frac{1}{4}$. Quindi si riottiene che la soluzione è $0<x<\frac{1}{4}$, cioè $x\in\left]0,\frac{1}{4}\right[$.

VALORE ASSOLUTO

La funzione "valore assoluto di x", oppure "modulo di x", che si scrive con il simbolo $|x|$, si definisce come

$$|x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$



DISEQUAZIONI CON IL VALORE ASSOLUTO

$$|x-1| \leq 7$$

Notiamo innanzi tutto che $|t| = \begin{cases} t & \text{per } t \geq 0 \\ -t & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$

e quindi $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{per } x-1 \geq 0, \text{ cioè } x \geq 1 \\ 1-x & \text{per } x-1 \leq 0, \text{ cioè } x \leq 1 \end{cases}$

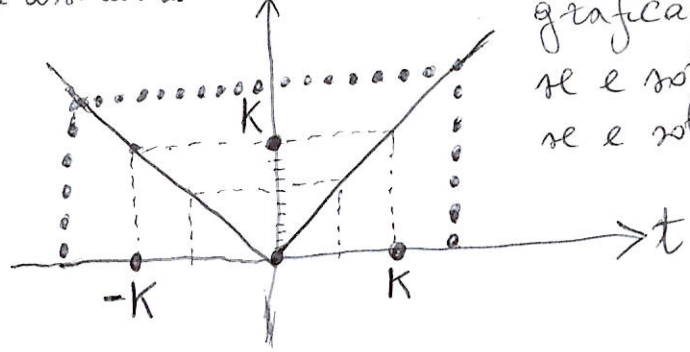
(N.B.: Si deve sostituire t con $x-1$ IN TUTTO E PER TUTTO. Sarebbe grave errore scrivere

$$\begin{cases} x-1 & \text{per } x \geq 0 \\ 1-x & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$
)

Come si risolve la disequazione $|x-1| \leq 7$?

Siccome 7 è una <u>costante positiva</u>, si può applicare il seguente metodo. (1° metodo) Poniamo $t = x-1$, e sia $k > 0$.

valore assoluto di $t = |t|$



Facciamo la seguente osservazione: graficamente, si vede che $|t| < k$ se e solo se $-k < t < k$; $|t| = k$ se e solo se $t = k$ oppure $t = -k$; $|t| \leq k$ se e solo se $-k \leq t \leq k$; $|t| > k$ se e solo se $t > k$ oppure $t < -k$; $|t| \geq k$ se e solo se $t \geq k$ oppure $t \leq -k$.

Nel nostro caso, abbiamo $|t| \leq 7$, che equivale a dire $-7 \leq t \leq 7$; visto che $t = x-1$, si ottiene

$$-7 \leq x-1 \leq 7.$$

Pertanto, risolvere la disequazione data equivale a risolvere le due disequazioni I) $-7 \leq x-1$ e II) $x-1 \leq 7$ e trovare (tutte e sole) le soluzioni che soddisfano <u>allo stesso tempo, contemporaneamente</u> la I) e la II); cioè, con linguaggio insiemistico, l'insieme delle soluzioni della disequazione data sarà uguale all'<u>intersezione insiemistica</u> tra l'insieme delle soluzioni della I) e l'insieme delle soluzioni della II).

Risolviamo la I). Da $-7 \leq x-1$ si ottiene $\boxed{x \geq} -7+1 = \boxed{-6}$.

Risolviamo la II). Da $x-1 \leq 7$ si ottiene $\boxed{x} \leq 7+1 = \boxed{8}$.

Facendo l'intersezione insiemistica, si ha che $-6 \leq x \leq 8$, cioè $x \in [-6, 8]$, fornisce l'insieme di tutte le soluzioni della disequazione data.

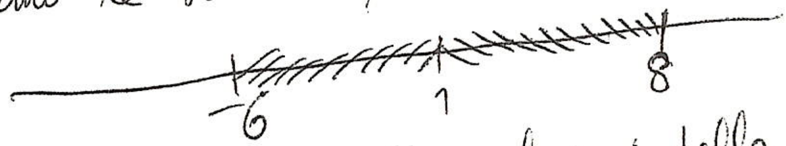
Adesso risolviamo la stessa disequazione con un altro metodo, che si può usare <u>anche in altri casi</u>, per esempio quando al posto della costante 7 c'è un'espressione che contiene la x.

Come si risolve la disequazione $|x-1| \leq 7$? (2° metodo)

Si considerano i due casi: I) $x-1 \geq 0$ $(x \geq 1)$
II) $x-1 \leq 0$ $(x \leq 1)$

Caso I): la nostra disequazione diventa $x-1 \leq 7$, cioè $x \leq 8$.
Ma $x \geq 1$, e quindi abbiamo le soluzioni $\boxed{1 \leq x \leq 8}$.

Caso II): la nostra disequazione diventa $1-x \leq 7$, cioè
$x-1 \geq -7$, ossia $x \geq -7+1=-6$. Ma $x \leq 1$, e quindi
abbiamo le soluzioni $\boxed{-6 \leq x \leq 1}$



Quindi l'insieme delle soluzioni della nostra disequazione è $-6 \leq x \leq 8$, cioè $x \in [-6, 8]$.

Risolviamo ora la disequazione

$$|2x-3| > x+10.$$

Procedendo analogamente come nell'esercizio precedente, si ha

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{quando } 2x-3 \geq 0 \quad \text{Caso I)} \\ 3-2x & \text{quando } 2x-3 \leq 0 \quad \text{Caso II)} \end{cases}$$

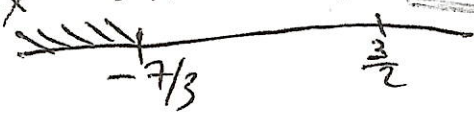
Nel caso I), $2x \geq 3$, e quindi $x \geq \frac{3}{2}$. Per tali valori di x,
la disequazione diventa $2x-3 > x+10$, cioè

$2x - x > 10 + 3$ $\boxed{x > 13}$:

sono soluzioni vere e proprie, perché siamo nel caso $x \geq \frac{3}{2}$

Nel caso II), $2x \leq 3$, e quindi $x \leq \frac{3}{2}$, e la disequazione diventa

$3-2x > x+10$ $\quad 3-10 > x+2x$ $\quad 3x < -7$ $\quad \boxed{x < -\frac{7}{3}}$



Sono soluzioni vere e proprie, perché $x \leq \frac{3}{2}$.

Quindi, complessivamente, otteniamo le soluzioni

$$\boxed{x > 13} \quad \text{oppure} \quad \boxed{x < -\frac{7}{3}}$$

Con linguaggio insiemistico, si mette l'operazione $\cup$ ("unione") e si dice che l'insieme delle soluzioni della disequazione $|2x-3| > x+10$ è

$$\boxed{\left]13, +\infty\right[\ \cup \ \left]-\infty, -\frac{7}{3}\right[}$$

(semirette aperte, perché ci sono le disuguaglianze $>$ e $<$: se ci fosse stato $\geq$ e $\leq$, l'insieme sarebbe stato $\left[13, +\infty\right[\cup \left]-\infty, -\frac{7}{3}\right]$, semirette chiuse).

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEL VALORE ASSOLUTO

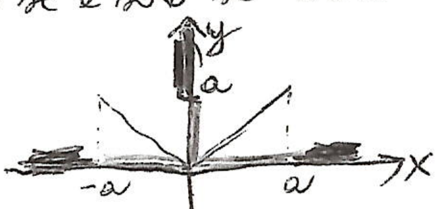
1) $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed $x = 0$ se e solo se $|x| = 0$;
$|x| > 0$ se e solo se $x \neq 0$;

2) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, si ha $|xy| = |x||y|$; se $y \neq 0$, si ha $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$;

3) per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, si ha $|x+y| \leq |x| + |y|$
(il valore assoluto della somma è $\leq$ della somma dei valori assoluti);

4) per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, si ha $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$

5) Fissato $a \geq 0$, si ha $|x| \leq a$ se e solo se $-a \leq x \leq a$;
$|x| < a$ se e solo se $-a < x < a$; $|x| \geq a$ se e solo se $x \geq a$ oppure $x \leq -a$; $|x| > a$ se e solo se $x > a$ oppure $x < -a$.



6) Per ogni numero reale x, $\sqrt{x^2} = |x|$ (es: $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$ e non -5).

<u>Esercizio</u>: Risolvere la seguente disequazione:

$$|x-2|>1 \qquad (\dagger)$$

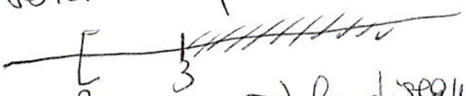
<u>1° metodo</u>: Poniamo $k=1$, e $t=x-2$. La disequazione ha una espressione del tipo $|t|>k$ che, per quello che è stato detto in un precedente esercizio, è equivalente a $t>k$ oppure $t<-k$, cioè I) $x-2>1$ <u>oppure</u> II) $x-2<-1$, ossia l'insieme delle soluzioni della disequazione $(\dagger)$ è dato dall'<u>unione</u> insiemistica degli insiemi delle soluzioni della I) e della II). Svolgendo la I), si ha $x-2>1$ se e solo se $\boxed{x>3}$, mentre svolgendo la II) si ottiene $x-2<-1$ se e solo se $x<1$. Pertanto l'insieme delle soluzioni della disequazione $(\dagger)$ è dato da $\boxed{x>3 \text{ oppure } x<1}$, cioè $\boxed{x\in\,]-\infty,1[\,\cup\,]3,+\infty[}$.

<u>2° metodo</u>: Si considerano i due casi (cioè, in parole povere, “si spezza il valore assoluto”)

I) $x-2\geq 0$ (cioè $x\geq 2$)

II) $x-2\leq 0$ (cioè $x\leq 2$)

Nel caso I), la disequazione data $|x-2|>1$ diventa $x-2>1$, cioè $\boxed{x>3}$. Poiché in questo caso si deve avere <u>a priori</u> $x\geq 2$, allora tutti i valori $x>3$ “vanno bene” e non ci sono “restrizioni”.



Nel caso II), la disequazione data $(\dagger)$ diventa $2-x>1$, cioè $-x>-1$, o $\boxed{x<1}$. Poiché nel caso II) è a priori $x\leq 2$, allora tutti i valori $x<1$ “vanno bene”, senza particolari “restrizioni”.

Ora, l'insieme di tutte (e sole) le soluzioni della disequazione data è uguale all'unione insiemistica dei due insiemi <u>ottenuti nei due casi I) e II)</u>, cioè $\boxed{x>3 \text{ oppure } x<1}$, vale a dire $\boxed{x\in\,]-\infty,1[\,\cup\,]3,+\infty[}$. Si perviene dunque allo <u>STESSO RISULTATO</u> che era stato ottenuto con il 1° metodo.

Risolvere la seguente disequazione:

$$|x^2-4| \geq 12$$

Osserviamo che $|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{per } x^2-4 \geq 0 \quad \text{Caso I)} \\ 4-x^2 & \text{per } x^2-4 \leq 0 \quad \text{caso II)} \end{cases}$

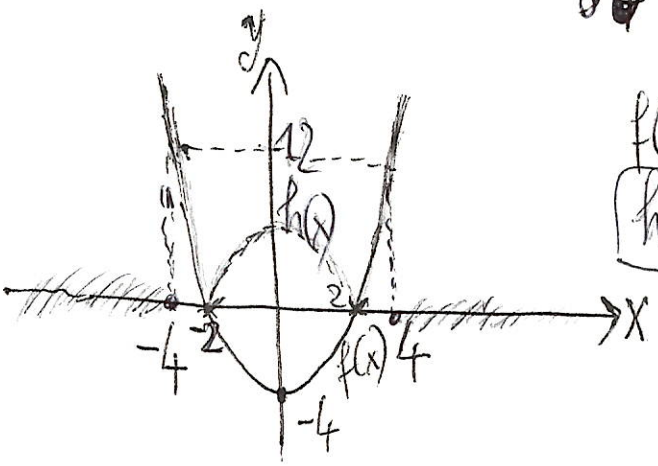
perché $|t| = \begin{cases} t & \text{per } t \geq 0 \\ -t & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$ (si sostituisce t con x^2-4 IN TUTTO E PER TUTTO)

Caso I): la disequazione diventa $\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x^2-4 \geq 12 \end{cases}$, ma

se $x^2-4 \geq 12$, allora automaticamente $x^2-4 \geq 0$, quindi la disequazione $x^2-4 \geq 0$ diventa superflua. Dunque, il caso I) si riduce a $\boxed{x^2-4 \geq 12}$, cioè $x^2 \geq 16$. Le radici dell'equazione $x^2 = 16$, cioè $x^2-16=0$, sono $+4$ e -4, e quindi bisogna prendere i valori esterni. Pertanto le soluzioni del Caso I) sono $x \in \,]-\infty, -4] \cup [4, +\infty[$, cioè $x \leq -4$ oppure $x \geq 4$.

Caso II): la disequazione diventa $\begin{cases} x^2-4 \leq 0 \\ 4-x^2 \geq 12 \end{cases}$

Ma da $4-x^2 \geq 12$ si ottiene $-x^2 \geq 8$, il che è impossibile, essendo sempre $-x^2 \leq 0$. Il caso II), dunque, NON FORNISCE SOLUZIONI.



$f(x)=x^2-4$

$\boxed{h(x)=|x^2-4|}$

Si vede anche geometricamente dalla figura che le soluzioni della disequazione $|x^2-4|\geq 12$ sono date da $x\in\,]-\infty,-4]\cup[4,+\infty[$.

Per $x\in[-2,2]$, il grafico di $h(x)$ si ottiene ribaltando il pezzo del corrispondente grafico di $f(x)$: in questa zona, $f(x)=x^2-4$ è negativa, e quindi $h(x)=|x^2-4|=-(x^2-4)=4-x^2$ sarà positiva.

FUNZIONI ELEMENTARI (POTENZE E RADICI)

POTENZE CON ESPONENTE INTERO POSITIVO: Siano x un numero reale qualsiasi, ed n un numero naturale (o intero positivo). Si definisce x^n come il prodotto di n fattori uguali ad x, cioè

$$\boxed{x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \quad (n \text{ volte})}$$

N.B.: si ha $x^{n+1} = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n\text{-sima volta}} \cdot x = x^n \cdot x$

$\boxed{x^{n+1} = x^n \cdot x}$ si chiama FORMULA DI RICORRENZA (UTILISSIMA)

Esempi: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
(la potenza non è commutativa, in generale)

POTENZE CON ESPONENTE INTERO NEGATIVO:
Siano x un numero reale DIVERSO DA 0, ed n un intero positivo. Si definisce

$$\boxed{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}.$$

Esempio: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

ESPONENTE NULLO: Per ogni $x \neq 0$, si pone $\boxed{x^0 = 1}$.
Non si definisce 0^0 e neanche 0^k con k negativo.

Vediamo adesso di definire le

POTENZE CON ESPONENTE RAZIONALE

Cominciamo con la

$\boxed{\text{RADICE } n\text{-SIMA}}$

Sia n un intero positivo. Se n è dispari ed x è un qualsiasi numero reale, si chiama radice n-sima di x $(\sqrt[n]{x})$ quell'unico numero reale y tale che $y^n = x$.

Se n è pari ed x è un numero reale NON NEGATIVO, si chiama radice n-sima di x quell'unico numero reale non negativo y tale che $y^n = x$.

In tutti e due i casi, si scrive $\boxed{y = \sqrt[n]{x}}$.

Per esempio: $\sqrt{25} = \sqrt[2]{25}$: è vero che $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$, ed è vero anche che $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$.

Prenderemo il valore 5 e non il valore -5.

Quindi diremo che $\boxed{\sqrt{25} = 5}$ e non -5.

$\sqrt{-25}$ non esiste nel campo dei numeri reali

Si ha anche: $\sqrt[3]{-8} = -2$, perché: $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^3 = 4(-2) = -8$, mentre $\sqrt[3]{8} = 2$, perché $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$

La radice di ordine pari ha senso solo se l'argomento è nonnegativo, e il risultato è sempre un numero reale nonnegativo. Si pone $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, dove ha senso.

ESPONENTE RAZIONALE: siano $x>0$, m ed n due interi, con $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ (quindi m di segno qualunque, ed n positivo). Supponiamo che m ed n non abbiano divisori interi comuni al di fuori di $+1$ e -1, cioè siano <u>primi fra loro</u>. Definiamo

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Quindi supporremo che la frazione $\frac{m}{n}$ sia "ridotta ai minimi termini": nel senso che, se dovessimo considerare, ad esempio, $x^{\frac{6}{8}}$, faremo $x^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{x^3}$.

Se $\frac{m}{n}>0$, porremo $0^{\frac{m}{n}}=0$.

<u>Esempio:</u> $4^{\frac{3}{2}}=\sqrt{4^3}=\sqrt{4\cdot 4\cdot 4}=\sqrt{16\cdot 4}=\sqrt{64}=8$.

<u>ESPONENTE IRRAZIONALE</u>: Facciamo direttamente un esempio: chi è $2^{\sqrt{2}}$?

$\sqrt{2}\simeq 1,414213\ldots$ $\sqrt{2}$ si "costruisce per approssimazioni successive", approssimando con 1, 1,4 1,41 1,414 .... e con 2, 1,5, 1,42 1,415 (si può vedere che, procedendo indifferentemente con la prima o con la seconda approssimazione, si ottiene sempre il numero $\sqrt{2}$)

Adesso, consideriamo le seguenti due approssimazioni

$$2^1 \quad 2^{1,4} \quad 2^{1,41} \quad 2^{1,414} \ldots \quad e \quad 2^2 \quad 2^{1,5} \quad 2^{1,42} \quad 2^{1,415} \ldots$$

Si può vedere che, andando avanti indifferentemente con la prima o con la seconda approssimazione, si ottiene sempre lo stesso numero: questo numero lo chiameremo $\boxed{2^{\sqrt{2}}}$.

Questo vale quando la base è positiva. Si pone: $\boxed{0^b=0}$ per ogni $b>0$.

In modo analogo, con una costruzione simile, è possibile definire la potenza con esponente irrazionale t, diciamo x^t, per ogni $x > 0$, in modo tale che siano verificate le seguenti

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DELLE POTENZE:

$\boxed{a^{x+y} = a^x \cdot a^y}$ per ogni $a > 0$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$

$\boxed{(a^x)^y = a^{xy}}$ per ogni $a > 0$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$

$\boxed{(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x}$ per ogni $a, b > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}}$ per ogni $a > 0$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$

Queste proprietà sono verificate anche quando la base è negativa, purché TUTTO QUELLO CHE È SCRITTO ABBIA SENSO, per esempio $(-1)^{3+5} = (-1)^3 \cdot (-1)^5$:

infatti $(-1)^{3+5} = (-1)^8 = 1$ (8 è pari)

$$\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1} =$$

$$(-1)^3 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$(-1)^5 = \underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot(-1) = -1$$

$(-1)^3 \cdot (-1)^5 = (-1)\cdot(-1) = 1 = (-1)^8$. Più in generale,

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Si può vedere che valgono le seguenti disuguaglianze.

Disuguaglianze a base <u>fissa</u> ed <u>esponente variabile</u>:
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, se $a > 1$, si ha che:

se $x < y$, allora $a^x < a^y$;

se invece $0 < a < 1$, si ha che

se $x < y$, allora $a^x > a^y$

Cioè: la funzione a^x è <u>strettamente crescente</u> se $a > 1$, mentre è <u>strettamente decrescente</u> se $0<a<1$.

La funzione che ad ogni x associa il numero a^x si chiama FUNZIONE ESPONENZIALE

Disuguaglianze a base variabile ed esponente fisso. Per ogni $\boxed{x>0, y>0}$ e per ogni fissato $a > 0$, si ha che:

se $x < y$, allora $x^a < y^a$;

per ogni fissato $a < 0$, si ha che:

se $x < y$, allora $x^a > y^a$.

[Cioè: la funzione x^a è <u>strettamente crescente</u> se $a > 0$, mentre è <u>strettamente decrescente</u> se $a < 0$.]

N.B.: Se a è un qualsiasi numero reale, la funzione POTENZA x^a viene definita per $\boxed{x > 0}$
(in generale, non sempre questa scrittura ha senso se $x \leq 0$)

ESEMPI ED ESERCIZI SULLE POTENZE

1) $\frac{10^7}{10^3} = 10^{7-3} = 10^4$: infatti

$$\frac{10^7}{10^3} = \frac{\cancel{10 \cdot 10 \cdot 10} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{\cancel{10 \cdot 10 \cdot 10}} = 10^4 = 10'000$$

2) $\frac{1000 \cdot 10^3}{100^2} = \frac{10^3 \cdot 10^3}{(10^2)^2} = \frac{10^{3+3}}{10^{2\cdot 2}} = \frac{10^6}{10^4} = 10^2 = 100$

(... per le proprietà delle potenze)

3) $1000^{1000} = (10^3)^{1000} = 10^{3\cdot 1000} = 10^{3000}$

4) $\frac{100^{100}}{200} = \frac{100^{100}}{2 \cdot 100} = \frac{1}{2} \cdot \frac{100^{100}}{100} = \frac{1}{2} \cdot 100^{100-1} = \frac{1}{2} \cdot 100^{99}$

5) $\frac{1000^{100}}{100^{1000}} = \frac{(10^3)^{100}}{(10^2)^{1000}} = \frac{10^{3\cdot 100}}{10^{2\cdot 1000}} = \frac{10^{300}}{10^{2000}} = 10^{300-2000} =$

$= 10^{-1700} = \frac{1}{10^{1700}}$

6) $7^{-7} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^5 = \frac{1}{7^7} \cdot \frac{1}{7^5} = \frac{1}{7^{7+5}} = \frac{1}{7^{12}}$ o anche

$7^{-7} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^5 = 7^{-7} \cdot (7^{-1})^5 = 7^{-7} \cdot 7^{-5} = 7^{-12} = \frac{1}{7^{12}}$

7) $7^{-3} : 7^{-12} = 7^{-3} \cdot \frac{1}{7^{-12}} = 7^{-3} \cdot 7^{12} = 7^{-3+12} = 7^9$

RISOLVERE LE SEGUENTI EQUAZIONI:

1) $\sqrt[x]{16}=2 \quad 16^{\frac{1}{x}}=2 \quad (2^4)^{\frac{1}{x}}=2$

$2^{4\cdot\frac{1}{x}}=2^1 \quad 4\cdot\frac{1}{x}=1 \quad x=4$

2) $\sqrt[4]{x}=3 \quad x^{\frac{1}{4}}=3 \quad x=x^1=x^{\frac{1}{4}\cdot 4}=(x^{\frac{1}{4}})^4=3^4=81$

3) $x^{\frac{1}{2}}=5 \quad x=x^1=(x^{\frac{1}{2}})^2=5^2=25$

4) $x^{\frac{3}{2}}=27 \quad x=x^1=x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}=(x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}=27^{\frac{2}{3}}=$

$=27^{\frac{1}{3}\cdot 2}=(27^{\frac{1}{3}})^2=(\sqrt[3]{27})^2=3^2=9$

5) $x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4} \quad x=x^1=x^{(-\frac{1}{2})(-2)}=(x^{-\frac{1}{2}})^{-2}=(\frac{1}{4})^{-2}=$

$=\frac{1}{4^{-2}}=4^2=16$

6) $8^x=4 \quad (2^3)^x=2^2 \quad 2^{3x}=2^2 \quad 3x=2 \quad x=\frac{2}{3}$

7) $\sqrt[x]{16}=8 \quad 16^{\frac{1}{x}}=8 \quad (2^4)^{\frac{1}{x}}=2^3 \quad 2^{\frac{4}{x}}=2^3$

$\frac{4}{x}=3 \quad \frac{x}{4}=\frac{1}{3} \quad x=\frac{4}{3}$

8) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{x} \quad 2^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}=10^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}} \quad x=10$

9) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt[x]{6} \quad 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}=6^{\frac{1}{2}}=\sqrt[x]{6}=6^{\frac{1}{x}}$

$6^{\frac{1}{2}}=6^{\frac{1}{x}} \quad \frac{1}{2}=\frac{1}{x} \quad x=2$

10) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt[4]{x} \quad 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{4}} \quad x=x^1=(x^{\frac{1}{4}})^4=(2^{\frac{1}{2}})^4\cdot(3^{\frac{1}{2}})^4=$

$2^{4/2}\cdot 3^{4/2}=2^2\cdot 3^2=4\cdot 9=36$

11) $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{x}$ $\quad (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8}}$ $\quad 2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8}}$

$x^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{4}}$ $\quad x = x^1 = x^{\frac{1}{8}\cdot 8} = (x^{\frac{1}{8}})^8 = (2^{\frac{1}{4}})^8 = 2^{\frac{1}{4}\cdot 8} = 2^2 = 4$

12) $2^{\frac{3}{4}} = 8^{\frac{1}{x}}$ $\quad 2^{3\cdot\frac{1}{4}} = (2^3)^{\frac{1}{x}} = 2^{3\cdot\frac{1}{x}}$ $\quad \cancel{3}\cdot\frac{1}{4} = \cancel{3}\cdot\frac{1}{x}$ $\quad x=4$

13) $2^{\frac{5}{4}} = \sqrt{2^x}$ $\quad 2^{\frac{5}{4}} = (2^x)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{x}{2}}$ $\quad \frac{5}{4} = \frac{x}{2}$ $\quad x = 2\cdot\frac{5}{4} = \frac{5}{2}$

14) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[x]{4}$ $\quad 8^{\frac{1}{6}} = 4^{\frac{1}{x}}$ $\quad (2^3)^{\frac{1}{6}} = (2^2)^{\frac{1}{x}}$

$2^{\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{6}_2}} = 2^{\frac{2}{x}}$ $\quad \frac{1}{2} = \frac{2}{x}$ $\quad \frac{x}{2} = 2$ $\quad x = 4$

15) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[6]{x} = 2^{-1}$ $\quad 2^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{1}{6}} = 2^{-1}$ $\quad \frac{2^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}} = 2^{-1}$

$x^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{-1} = 2^{\frac{1}{3}}$ $\quad x^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} : 2^{-1} = 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^1 = 2^{\frac{1}{3}+1} = 2^{\frac{4}{3}}$

$x = x^1 = x^{\frac{1}{6}\cdot 6} = (x^{\frac{1}{6}})^{\cdot 6} = (2^{\frac{4}{3}})^6 = 2^{\frac{4}{3}\cdot 6} = 2^8 = 256$

16) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[x]{4} = 2$ $\quad 2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{x}} = 2$ $\quad 2^{\frac{1}{2}}\cdot(2^2)^{\frac{1}{x}} = 2$

$2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{2}{x}} = 2$ $\quad 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{x}} = 2^1$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{2}{x} = 1$ $\quad \boxed{\frac{2}{x}} = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\frac{x}{2} = 2$ $\quad x = 4$

17) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{x}$ $\quad x = (\sqrt{2}+\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2})^2 = 2^2\cdot(\sqrt{2})^2 = 4\cdot 2 = 8$

18) $\sqrt{8}\cdot\sqrt[3]{2^x}\cdot\sqrt[4]{8} = 8$ $\quad 8^{\frac{1}{2}}\cdot(2^x)^{1/3}\cdot 8^{\frac{1}{4}} = 8$ $\quad$ Ma

$(2^x)^3 = 2^{x\cdot 3} = 2^{3\cdot x} = (2^3)^x = 8^x$, quindi $8^{\frac{1}{2}}\cdot 8^x\cdot 8^{\frac{1}{4}} = 8^1$ $\quad \frac{1}{2} + x + \frac{1}{4} = 1$

$x = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} =$

$(2^3)^{\frac{1}{2}} \cdot (2^x)^{\frac{1}{3}} \cdot (2^3)^{\frac{1}{4}} = 2^3 \qquad 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^3$

$\frac{3}{2} + \frac{x}{3} + \frac{3}{4} = 3$ Mettiamo al minimo comune multiplo, che è 12:

$\frac{18}{12} + \frac{4x}{12} + \frac{9}{12} = \frac{36}{12} \qquad 18 + 4x + 9 = 36 \qquad 4x = 36 - 18 - 9 = 9 \; \boxed{x = \frac{9}{4}}$

○ 19) $\sqrt{32} - \sqrt{2} = \sqrt{x}$ Abbiamo il segno $-$, quindi cerchiamo qualche "trucco", ad esempio di raccogliere $\sqrt{2}$ da qualche parte. Si ha: $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2 \cdot 2^4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{16} = 4 \cdot \sqrt{2}$, quindi $\sqrt{32} - \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} = (4-1)\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$. La nostra equazione diventa $3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{x}$, ossia $x^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$. Si ha quindi $x = x^1 = x^{\frac{1}{2} \cdot 2} = (x^{\frac{1}{2}})^2 = (3 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^2 = 3^2 \cdot (2^{\frac{1}{2}})^2 = 3^2 \cdot 2^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 3^2 \cdot 2^1 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$ Quindi $\boxed{x = 18 \text{ e non } 30}$

20) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{x} \qquad 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$ Determiniamo x. Si ha:

$x = x^1 = x^{\frac{1}{6} \cdot 6} = (x^{\frac{1}{6}})^6 = (2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}})^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 \cdot (3^{\frac{1}{3}})^6 = 2^{\frac{6}{2}} \cdot 3^{\frac{6}{3}} = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$

ALTRI ESEMPI

1) A quanto è uguale $2^{20}-2^{19}$? C'è il "−" che potrebbe dare fastidio; allora (trucchetto!) raccogliamo una potenza di 2 da qualche parte. Si ha:

$$\boxed{2^{20}-2^{19}} = 2^{19+1}-2^{19} = 2^{19}\cdot 2^{1}-2^{19} = 2^{19}(2^{1}-1) = 2^{19}\cdot 1 = \boxed{2^{19}}$$

2) Quanto fa $3^{20}-3^{19}$?

$$\boxed{3^{20}-3^{19}} = 3^{19+1}-3^{19} = 3^{19}\cdot 3^{1}-3^{19} = 3^{19}(3^{1}-1) = \boxed{2\cdot 3^{19}}$$

3) $$\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}.$$

4) $$\frac{200^{200}}{400^{100}} = \frac{(2\cdot 100)^{200}}{(4\cdot 100)^{100}} = \frac{2^{200}\cdot 100^{200}}{4^{100}\cdot 100^{100}} =$$

$$= \frac{2^{200}}{(2^{2})^{100}}\cdot 100^{200-100} = \frac{2^{200}}{2^{2\cdot 100}}\cdot 100^{100} = \frac{2^{200}}{2^{200}}\cdot 100^{100} = 100^{100}$$

5) $$\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 5^{\frac{6+4+3}{12}} = 5^{\frac{13}{12}}$$

6) Invece, $\dfrac{2^{20}}{2^{19}} = 2^{20-19} = 2^{1} = 2$ (notare la profonda differenza con l'esempio 1)

7) ... e $\dfrac{3^{20}}{3^{19}} = 3^{20-19} = 3^{1} = 3$ (notare la profonda differenza con l'esempio 2))

LOGARITMI

Siano $a > 0$, $a \neq 1$, ed $x > 0$.

Allora (si può vedere che) esiste un unico numero reale y tale che $\boxed{a^y = x}$. In tal caso, il numero y si chiama

LOGARITMO IN BASE a di x

e si scrive $\boxed{y = \log_a x}$

Esempi: $\log_{10} 1000 = 3$, in quanto $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

$\log_{10}$ (1 seguito da k zeri) $= k$ $\quad \log_3 9 = 2$, perché $3^2 = 9$

$\log_2 8 = 3$, perché $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

In Chimica, il pH di una sostanza, detto in modo semplice, è "il logaritmo del reciproco della concentrazione idrogenionica" (cioè della concentrazione degli ioni H^+), ove il logaritmo è espresso in base 10. Per esempio, un pH uguale a 2 (sostanza molto acida) vuol dire che la concentrazione idrogenionica è $10^{-2} = \frac{1}{100}$. Il reciproco di $\frac{1}{100}$ è 100, cioè 10^2, e il logaritmo in base 10 di 100 è 2.

In questo materiale didattico, con il simbolo $\ln x$ oppure $\log x$ indichiamo il logaritmo in base e di x, ove e è il numero di Nepero ($e \simeq 2.7182818 \ldots$).

Con $\mathrm{Log}\, x$ indichiamo il logaritmo in base 10 (Log con la L MAIUSCOLA)

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEI LOGARITMI

0) Se $a>0, a\neq 1$, allora $\boxed{\log_a 1 = 0}$, $\boxed{\log_a a = 1}$.

1) Se $a>0, a\neq 1$, $x>0$, $y>0$, si ha:

1a) $\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$

1b) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

2) Se $a>0, a\neq 1$, $x>0$, $b\in\mathbb{R}$, si ha:

$$\boxed{\log_a (x^b) = b\cdot \log_a x}$$

3) FORMULA DEL CAMBIO DI BASE

Siano $a, b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$. Per ogni $x>0$ si ha

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Esempi: $a = 100$ $\quad x = 10'000$ $\quad b = 10$.

Si ha: $100^2 = 100\cdot 100 = 10'000$, quindi $\log_{100} 10'000 = 2$.

Inoltre $\log_{10} 10'000 = 4$, perché $10^4 = 10'000$;

$\log_{10} 100 = 2$, perché $10^2 = 100$. Quindi $2 = \frac{4}{2}$, ok.

La formula del cambio di base è molto comoda quando è più agevole calcolare i logaritmi in base b piuttosto che i logaritmi in base a; inoltre b ce la possiamo scegliere come ci fa più comodo. Per esempio:

$$\log_3 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 3} \qquad (a=3, b=10, x=7)$$

Ciò viene dalla cosiddetta "regola della catena":

$$\boxed{\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x} \qquad (a,b,x>0, a\neq 1, b\neq 1)$$

Esempi: $2^x = 8 \quad x = \log_2 8 = 3$

$10^x = 100 \quad x = \log_{10} 100 = 2$

$\log_3 \frac{1}{3} = -1$ sto pensando a $3^x = \frac{1}{3} \quad 3^x = 3^{-1} \quad x = -1$

$\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ sto pensando a $4^x = \frac{1}{2} \quad 2^{2x} = 2^{-1} \quad 2x = -1 \quad x = -\frac{1}{2}$

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$ sto pensando a $2^x = \frac{1}{4} \quad 2^x = \frac{1}{2^2} = 2^{-2} \quad x = -2$

$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ sto pensando a $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$, cioè $\frac{1}{2^x} = 2^2$,

$2^{-x} = 2^2$, $-x = 2$, $x = -2$

$\log_2 16 = 4$ sto pensando a $2^x = 16 \quad 2^x = 2^4 \quad x = 4$

Risolvere l'equazione $\log_2 x = 3$: bisogna pensare a $2^3 = x$: quindi $x = 8$.

Risolvere l'equazione $\log_2 x = 3 \log_2 2$. In virtù delle propietà fondamentali del logaritmo, si ha

$\log_2 x = \log_2 (2^3)$, da cui $x = 2^3 = 8$.

Risolvere l'equazione $\log_3 (2^4) = x \log_3 2$. In virtù delle propietà fondamentali del logaritmo, si ha

$4 \cdot \log_3 2 = x \log_3 2$. Dividendo il tutto per $\log_3 2$ (che è positivo perché $2 > 1$, e quindi $\log_3 2 > \log_3 1 = 0$; la base 3 è più grande 1, e quindi la disuguaglianza si mantiene inalterata), si ha $4 = x$. Quindi $x = 4$ è la soluzione dell'equazione.

Risolvere l' equazione

$$\log_3 \sqrt{2} = x \log_3 2$$

Per le propietà dei logaritmi, si ha

$\log_3 (2^{\frac{1}{2}}) = x \log_3 2 \qquad \frac{1}{2} \log_3 2 = x \log_3 2$, quindi $\boxed{x = \frac{1}{2}}$.

$$\log_2 (8 \cdot 16 \cdot 64) = \log_2 8 + \log_2 16 + \log_2 64 = 3 + 4 + 6 = 13$$

(perché $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^6 = 64$)

$$\log_3 20 + \log_3 4 = \log_3 (20 \cdot 4) = \log_3 80$$

$$\log_3 20 - \log_3 4 = \log_3 \frac{20}{4} = \log_3 5$$

$$\log_5 3 - \log_5 2 = \log_5 \frac{3}{2}$$

Risolvere l' equazione

$$\log_2 4 \cdot \log_2 8 = \log_2 x$$

Osserviamo che $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, e quindi $\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3$.

Quindi si ha $2 \cdot 3 = \log_2 x$, da cui $x = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$.

Risolvere l' equazione

$\boxed{\log_2 (4^x) = 9}$. Notiamo che $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$

Quindi la nostra equazione si scrive $\log_2 (2^{2x}) = 9$, cioè

$2x = 9$, $x = \frac{9}{2}$ (Infatti, dalla definizione di logaritmo, il logaritmo in base 2 di 2^{2x} è quel numero y tale che $2^y = 2^{2x}$, cioè $y = 2x$: quindi si scrive anche $\log_2 (2^{2x}) = 2x$. Analogamente, si vede che per ogni numero reale t si ha $\log_2 (2^t) = t$. Inoltre, sempre dalla definizione di logaritmo, si ha che per ogni numero positivo s, $2^{\log_2 s} = s$: infatti $\log_2 s$ è quel numero w tale che $2^w = s$).

Queste considerazioni valgono qualsiasi sia la base $a>0$, $a\neq 1$. Pertanto, fissato $a>0, a\neq 1$, si ha:

$\boxed{\log_a a^t = t}$ per ogni numero reale t;

$\boxed{a^{\log_a s} = s}$ per ogni numero reale positivo s.

Risolvere la seguente equazione:

$$\boxed{\log_x 4 = 2}$$

Può essere "scomodo" il fatto che l'incognita x sia "alla base". Allora (trucco) APPLICHIAMO LA FORMULA DEL CAMBIO DI BASE, cercando una base b abbastanza "comoda". Poiché c'è $4=2^2$, stiamo pensando di prendere $\boxed{b=2.}$ Si ha:

$$2 = \log_x 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 x} = \frac{2}{\log_2 x}$$ (perché $\log_2 4 = 2$, in quanto $2^2=4$)

e quindi

$$1 = \frac{1}{\log_2 x}, \quad \log_2 x = 1, \text{ e quindi } x=2, \text{ perché } 2^1 = 2.$$

Pertanto $\boxed{x=2}$ è la soluzione dell'equazione $\boxed{\log_x 4 = 2}$.

Risolvere la seguente equazione:

$$\boxed{\log_3 9 = \log_x 25.}$$

Intanto, osserviamo che $\log_3 9 = 2$, in quanto $3^2 = 9$.
Quindi la nostra equazione diventa $\boxed{\log_x 25 = 2}$

Quello che può essere "scomodo" è che l'incognita x si trova "nella posizione della base". Allora (trucco) APPLICHIAMO LA FORMULA DEL CAMBIO DI BASE, cercando una base b abbastanza "comoda". C'è il numero 25, che si esprime come $25 = 5^2$: allora pensiamo alla base $\boxed{b=5}$. Si ha allora:

$$\cancel{2} = \log_x 25 = \frac{\log_5 25}{\log_5 x} = \frac{\log_5 (5^2)}{\log_5 x} = \frac{\cancel{2}}{\log_5 x} \text{, quindi}$$

$$1 = \frac{1}{\log_5 x} \text{, cioè } \log_5 x = 1 = \log_5 5 \text{, da cui } \boxed{x=5}.$$

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

* Risolvere la seguente equazione

$$\log_7 3 \cdot \log_8 49 = \log_2 x$$

Trucco: quando ci sono basi diverse, applicare la formula del cambio di base. Esprimeremo tutto in base 2.

Si ha: $x = 2^{\log_7 3 \cdot \log_8 49} = 2^{\frac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 49}{\log_2 8}} =$

$$2^{\log_7 49 \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 8}} = 2^{\frac{2}{3} \cdot \log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

[NB: $a^{b \cdot c} = (a^b)^c$ dove ha senso]; $\log_7 49 = 2$ perché $7^2 = 49$; $\log_2 8 = 3$ perché $2^3 = 8$. Inoltre, $\log_2 3$ è quel numero y tale che $2^y = 3$: quindi $\boxed{2^{\log_2 3} = 3}$

97

VARIANTE!

ESERCIZIO: $\boxed{\log_7 3 \cdot \log_8 49 = \log_2 x}$

FORMULA DEL CAMBIO DI BASE

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Sia $H = \log_7 3 \cdot \log_8 49$. L'equazione è

$\log_2 x = H$, quindi $x = 2^H = 2^{\log_7 3 \cdot \log_8 49} =$

($a=7, x=3, b=2$ ed $a=8, x=49, b=2$)

$$= 2^{\frac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 49}{\log_2 8}} = 2^{\frac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 (7^2)}{3}} =$$

$$= \text{(propietà dei logaritmi) } 2^{\frac{\log_2 3}{\cancel{\log_2 7}} \cdot \frac{2 \cancel{\log_2 7}}{3}} =$$

(propietà delle potenze, $a^{b \cdot c} = (a^b)^c$ dove ha senso)

$$= \left(2^{\log_2 3}\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}.$$

N.B.: Come vedremo tra breve, si ha (senza dimostrazione) che la funzione $\log_a x$ è <u>strettamente crescente</u> se $a>1$, mentre è <u>strettamente decrescente</u> se $0<a<1$.
Questo è <u>di fondamentale importanza</u> nella risoluzione delle disequazioni (esponenziali e) logaritmiche.

Esercizio:

Risolvere l'equazione $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$ e la disequazione $4^x - 2^{x+2} + 3 > 0$.

TRUCCO: Riportarsi a un'equazione (o disequazione) di 2° grado. Per le proprietà delle potenze, si ha:

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2, \quad 2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^x.$$

La nostra equazione diventa $(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 3 = 0$.

Poniamo $2^x = t$. Si ha: $t^2 - 4t + 3 = 0$, che è una equazione di 2° grado. Si ha:

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Quindi $t = 3$ oppure $t = 1$. Ma $t = 2^x$, quindi per $t = 3$ si ha: $2^x = 3$, quindi $\boxed{x = \log_2 3}$;

per $t = 1$ si ha: $2^x = 1$, $\boxed{x = 0}$. L'equazione $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$ ammette le due soluzioni $x = \log_2 3$, $x = 0$.

Se si studia la disequazione $4^x - 2^{x+2} + 3 > 0$, si devono prendere i valori esterni $t > 3$ oppure $t < 1$.

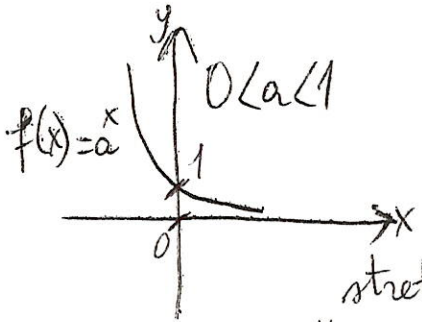
Ma $t > 3$ se e solo se $2^x > 3$ se e solo se $x > \log_2 3$ (infatti $x = \log_2(2^x)$, e la funzione $\log_2$ è strettamente crescente, perché la base è strettamente maggiore di 1).

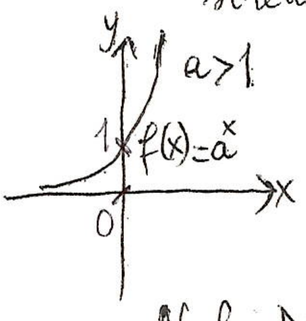
Analogamente, $2^x < 1$ se e solo se $x = \log_2(2^x) < \log_2 1 = 0$, cioè $x < 0$. Le soluzioni della disequazione sono $x > \log_2 3$ oppure $x < 0$, cioè $x \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]\log_2 3, +\infty[$.

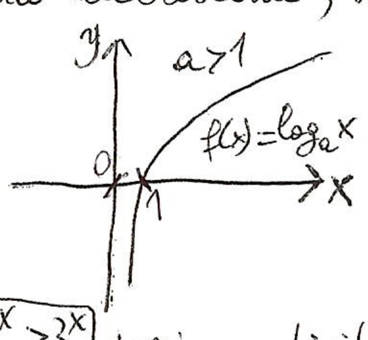
Esercizio: Risolvere l'equazione $\boxed{2^x = 3^x}$.

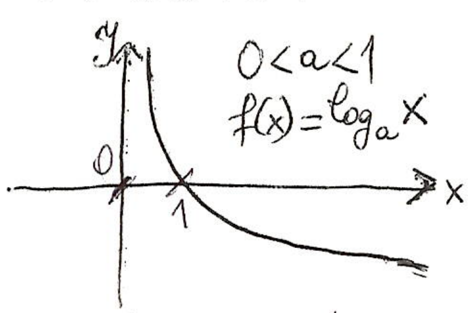
Si ha: $2^x = 3^x$ se e solo se $\dfrac{2^x}{3^x} = 1$, cioè $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 1$, da cui $x = 0$ (oppure se e solo se $\dfrac{3^x}{2^x} = 1$, cioè $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 1$, da cui $x = 0$).

Risolvere la disequazione $\boxed{2^x > 3^x}$. Siccome 3^x è positivo per tutti i numeri reali x, possiamo dividere entrambi i termini della disequazione per 3^x, mantenendo inalterato il verso della disequazione. Otteniamo $\dfrac{2^x}{3^x} > 1$, cioè $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x > 1$. Ma, siccome la base $a = \dfrac{2}{3} < 1$, allora si ha $\boxed{x < 0}$ e non $x > 0$ (perché, quando la base a è tale che $0 < a < 1$, allora la funzione a^x è strettamente decrescente, mentre quando la base $a > 1$, la funzione a^x è strettamente crescente. Anche la funzione $\log_a x$ è strettamente crescente, se la base $a > 1$, ed è strettamente decrescente, se la base a è tale che $0 < a < 1$.









N.B.: Da $\boxed{2^x > 3^x}$ possiamo dividere per 2^x, ottenendo $1 > \dfrac{3^x}{2^x} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$. Questa volta la base $\frac{3}{2} > 1$, e quindi la disuguaglianza rimane inalterata di verso: si ha $0 > x$, e quindi si ritrova $\boxed{x < 0}$.

Risolvere la seguente equazione:

$$\log_2(x-1) = 5 \qquad \left(\begin{matrix}\text{con}\\ x>1\end{matrix}\right)$$

e la seguente disequazione:

$$\log_2(x-1) > 5 \qquad (\text{con } x>1)$$

<u>TRUCCO FONDAMENTALE</u>: Siccome la base $2>1$, si ha

$$\log_2(x-1) = 5 \quad \text{se e solo se}$$

$$2^{\log_2(x-1)} = 2^5 \quad \text{, cioè}$$

$$x-1 = 2^{\log_2(x-1)} = 2^5 = 32 \quad \text{, da cui } \boxed{x=33}.$$

Analogamente (ponendo sempre $\boxed{x>1}$, perché $\log_a t$ è ben definito se e solo se $t>0$, e nel nostro caso $t=x-1$, da cui $x-1>0$, cioè $x>1$), si ha

$$\log_2(x-1) > 5 \quad \text{se e solo se}$$

$$x-1 = 2^{\log_2(x-1)} > 2^5 = 32, \quad \text{da cui } \boxed{x>33}.$$

Notiamo che $x>33$ implica automaticamente $x>1$, e quindi $\boxed{x>33}$ (cioè $x \in]33,+\infty[$) è la soluzione della nostra disequazione.

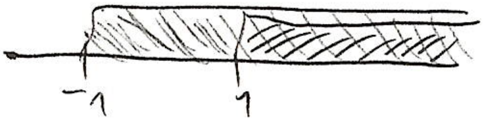
Risolvere la seguente equazione:

$$\log_2 (x-1) + \log_2 (x+1) = 3 \qquad (*)$$

e la seguente disequazione:

$$\log_2 (x-1) + \log_2 (x+1) < 3, \qquad (**)$$

Osserviamo che innanzi tutto, affinché i logaritmi abbiano senso, si deve avere $x-1>0$ ed $x+1>0$



cioè $x>1$ ed $x>-1$

Notiamo che $x>1$ implica automaticamente $x>-1$, quindi basta imporre la restrizione $\boxed{x>1}$. Applicando le proprietà fondamentali dei logaritmi, l' equazione $(*)$ diventa

$$\log_2 ((x-1)(x+1)) = 3 = \log_2 8, \text{ da cui}$$

$(x-1)(x+1) = 8$, cioè $x^2-1=8$, $x^2=9$, $x=3$ oppure $x=-3$.

Ma il valore -3 è da scartare, perché $x>1$.

Quindi l' (unica) soluzione dell' equazione $(*)$ è $x=3$.

Sempre con la restrizione $x>1$, applicando le proprietà fondamentali dei logaritmi, la disequazione $(**)$ diventa

$$\log_2 ((x-1)(x+1)) < 3 = \log_2 8, \text{ cioè}$$

$x^2-1 = (x-1)(x+1) < 8$, da cui $x^2 < 9$: dobbiamo prendere i valori <u>interni</u>, cioè $]-3,3[$. Tenendo conto che $x>1$, otteniamo $1<x<3$, cioè $x \in]1,3[$, che è la soluzione della disequazione $(**)$.

Risolvere la seguente disequazione:

$$\log_7 (2x-4) \leq 3 \cdot \log_7 2$$

Innanzi tutto, affinché quello che è scritto abbia senso, si deve avere $2x-4>0$, da cui $x-2>0$, ossia $\boxed{x>2}$.

Notiamo che, per le proprietà dei logaritmi, si ha

$$3 \cdot \log_7 2 = \log_7 2^3 = \log_7 8$$, e quindi

$$\log_7(2x-4) \leq \log_7 8$$, cioè (essendo la base $7>1$)

$$2x-4 \leq 8 \quad , \quad 2x \leq 12, \quad \boxed{x \leq 6}$$

Allora la soluzione globale della nostra disequazione sarà data dal sistema $\begin{cases} x>2 \\ x \leq 6 \end{cases}$, cioè $\boxed{2<x\leq 6}$, ossia $\boxed{x \in \,]2,6]}$.

Risolvere la seguente disequazione:

$$2^{x+3} \leq 4^x$$

Notiamo che, per le proprietà delle potenze, si ha $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$, e la nostra disequazione la possiamo scrivere come $2^{x+3} \leq 2^{2x}$, da cui $x+3 \leq 2x$, e quindi $2x-x \geq 3$, cioè $\boxed{x \geq 3}$ $(x \in [3,+\infty[)$.

Risolvere la seguente disequazione:

$$\log_2(2x-4)\leq 0$$

Innanzi tutto, affinché il logaritmo abbia senso, si deve avere

$2x-4>0$, cioè $\boxed{x>2}$.

La nostra disequazione si scrive anche come

$\log_2(2x-4)\leq\log_2 1$, da cui

$2x-4\leq 1$, $2x\leq 5$, $\boxed{x\leq\frac{5}{2}}$

Quindi l'insieme di tutte le soluzioni della disequazione è costituito dagli elementi x tali che $\boxed{2<x\leq\frac{5}{2}}$, cioè $x\in\left]2,\frac{5}{2}\right]$.

Risolvere l'equazione $2^{x^2+1}=8$ e la disequazione $2^{x^2+1}>8$.

Si ha: $2^{x^2+1}=8 \underset{\text{solo se}}{\overset{\text{se e}}{\Longleftrightarrow}} 2^{x^2+1}=2^3 \Leftrightarrow x^2+1=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=3-1=2$, cioè $x=\sqrt{2}$ oppure $x=-\sqrt{2}$.

Si ha: $2^{x^2+1}>8 \Leftrightarrow 2^{x^2+1}>2^3 \Leftrightarrow x^2+1>3 \Leftrightarrow$

$x^2>2$ (dobbiamo considerare i valori esterni, quindi

$x>\sqrt{2}$ oppure $x<-\sqrt{2}$, cioè $x\in\left]\sqrt{2},+\infty\right[\cup\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[$).

Richiami sugli INSIEMI

L'idea di fondo che ci sta dietro al concetto di insieme è quella di RAGGRUPPARE elementi di vario tipo: il concetto di raggruppamento ha svariatissime applicazioni in tutta la Matematica, ed anche in Statistica, quando si vogliono studiere diverse proprietà di una o più serie di numeri, che possano descrivere in sintesi ed efficacemente delle proprietà importanti.

Sostanzialmente, tutte quanti le nozioni e i concetti fondamentali della Matematica si basano sulla teoria degli insiemi. Per esempio, consideriamo una scatola contenente tante matite colorate (gialle, rosse, verdi, blu ...).

Intuitivamente, dunque, un INSIEME è un GRUPPO DI OGGETTI CHE HANNO UNA CARATTERISTICA COMUNE (per esempio, il colore giallo, o il colore rosso ...)

Gli elementi di un insieme possono essere raggruppati in diversi modi, per esempio: elencandoli, oppure descrivendo la proprietà caratterizzante, oppure anche graficamente, con l'aiuto dei cosiddetti "diagrammi di Venn" oppure "diagrammi di Eulero-Venn".

Inoltre, è fondamentale sapere distinguere se un elemento (diciamo a) appartiene a un insieme (diciamo A). La notazione $a \in A$, oppure $A \ni a$, sta a indicare che l'elemento a appartiene ad A, mentre con $a \notin A$ oppure $A \not\ni a$ si indica che l'elemento a non appartiene ad A.

Esempio: Sia A l'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano. Elencando gli elementi, si scrive $A = \{a, e, i, o, u\}$. Mettendo in evidenza la proprietà caratterizzante, si scrive

$A = \{*: *$ è una vocale tra le lettere dell'alfabeto italiano$\}$; con i diagrammi di Venn si ha un disegno

come in figura. Dall'elenco si deduce che $a \in A$. Si avrà invece che $b \notin A$, in quanto b è una consonante. Nella figura, a sta "dentro", mentre b sta "fuori".

Un insieme può avere nessun elemento, un numero finito di elementi o un numero infinito di elementi. L'unico insieme che non ha nessun elemento, cioè l'unico insieme privo di elementi, è l'insieme vuoto, che si indica con ϕ. Se un insieme è vuoto, oppure se possiamo contare i suoi elementi portando al termine il conteggio, allora l'insieme è finito (questa è un'idea intuitiva); altrimenti l'insieme è infinito.

Esempio: L'insieme $A = \{a, e, i, o, u\}$ è un insieme finito.

Il numero degli elementi di un insieme finito non vuoto A si chiama cardinalità dell'insieme A e si indica con card(A), |A| oppure #(A) (# si legge "diesis").

Per convenzione, diremo che card$(\phi) = 0$.

Quindi, se $A = \{a, e, i, o, u\}$, si ha: card$(A) = 5$.

N.B.: ogni elemento di un insieme dev'essere contato una volta sola. Come esempio, sia B l'insieme delle lettere della parola "CARRARA": questa parola è costituita da 7 lettere. Si ha: $B = \{C, A, R\}$, e quindi card$(B) = 3$, e non 7.

DEFINIZIONE DI SOTTOINSIEME

Siano A e B due insiemi non vuoti. Diremo che A è <u>un sottoinsieme di B</u> ($A \subset B$) o, equivalentemente, B è <u>un soprainsieme di A</u> ($B \supset A$) se ogni elemento di A è anche un elemento di B.

Per convenzione, diremo che l'insieme vuoto (ϕ) è un sottoinsieme di qualunque insieme E (vuoto o non vuoto) (si scriverà $\phi \subset E$ oppure $E \supset \phi$).

Siano ora A e B due insiemi. Si dice che A è un sottoinsieme <u>proprio</u> di B ($A \subsetneqq B$) oppure B è un soprainsieme proprio di A ($B \supsetneqq A$) se $A \subset B$, $A \neq \phi$ e $A \neq B$. Per definizione, i sottoinsiemi impropri di E sono l'insieme vuoto (ϕ) e lo stesso E.

N.B.: In letteratura, alcuni autori scrivono $A \subseteq B$ invece che $A \subset B$, ed $A \subset B$ invece che $A \subsetneqq B$.

Comunque, in generale, la differenza tra sottoinsieme (o soprainsieme) e sottoinsieme proprio (o soprainsieme proprio) si capisce dal contesto...

Esempio: Sia $E=\{a,b,c\}$. Chi sono i sottoinsiemi di E?

Elenchiamoli: insiemi con 0 elementi: $\emptyset$
insiemi con 1 elemento: $\{a\},\{b\},\{c\}$
insiemi con 2 elementi: $\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$
insiemi con 3 elementi: $\{a,b,c\}$

Quindi, se indichiamo con $\mathcal{P}(E)$ l'insieme (o la classe) di tutti i sottoinsiemi di E, si ha:

$$\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\overset{E}{\{a,b,c\}}\}.$$

Notiamo che la cardinalità di E è 3, mentre la cardinalità di $\mathcal{P}(E)$ è $8=2\times4=2\times(2\times2)$ (proprietà associativa) $=2\times2\times2=2^3$.
Questo è sempre vero: infatti

per ogni insieme finito E, si ha $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E))=2^{\mathrm{card}(E)}$ $\quad(2^n=\underbrace{2\times2\times\dots\times2}_{n \text{ volte}})$

Invece l'insieme $\mathcal{E}$ dei sottoinsiemi propri di E è:

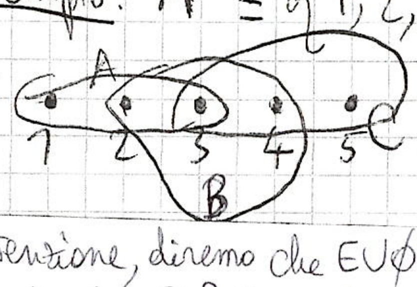
$$\mathcal{E}=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$$ non c'è tutto $E=\{a,b,c\}$ e non c'è $\emptyset$ (insieme vuoto)

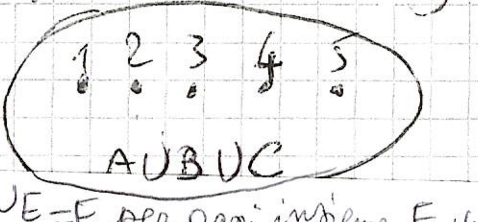
OPERAZIONI TRA INSIEMI: UNIONE

Dati due insiemi A e B, l'<u>unione</u> $A\cup B$ è l'insieme costituito esattamente dagli elementi che appartengono al primo oppure al secondo degli insiemi dati, cioè dagli elementi che appartengono ad almeno uno degli insiemi dati. Similmente, dati tre o più insiemi, la loro <u>unione</u> è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno degli insiemi dati.

Esempio: $A=\{1,2,3\}$ $B=\{2,3,4\}$, $C=\{3,4,5\}$

Diagrammi di Venn:





$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5\}$ (gli elementi si contano una volta sola)

Per convenzione, diremo che $E\cup\emptyset=\emptyset\cup E=E$ <u>per ogni</u> insieme E, vuoto o non vuoto.
È vero che $A\subset B$? Se ciò fosse, allora tutti gli elementi di A dovrebbero appartenere anche a B. Ma $1\in A$, $1\notin B$. Quindi non è vero che $A\subset B$, e pertanto A <u>non</u> è un sottoinsieme di B, e scriveremo $A\not\subset B$.

INTERSEZIONE TRA INSIEMI

Dati due insiemi A e B, l'intersezione $A \cap B$ è l'insieme formato esattamente dagli elementi che appartengono sia al primo sia al secondo insieme, cioè dagli elementi che appartengono a tutti gli insiemi dati. Similmente, dati tre o più insiemi, la loro intersezione è l'insieme costituito dagli elementi appartenenti contemporaneamente a tutti quanti gli insiemi dati. Se gli insiemi dati non hanno nessun elemento in comune, diremo che la loro intersezione è l'insieme vuoto $\emptyset$. Due insiemi A, B tali che $A \cap B = \emptyset$ si dicono disgiunti.

Esempi: Siano $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, $C=\{3,4,5\}$. Si ha: $A \cap B \cap C = \{3\}$.

Siano $X=\{11, 12, 13\}$, $Y=\{14, 15, 16\}$

Si ha: $X \cap Y = \emptyset$, perché X ed Y non hanno elementi in comune.

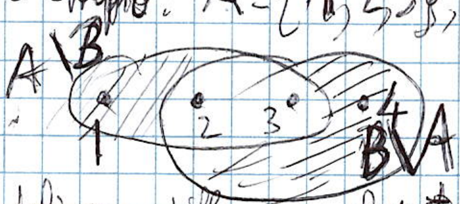
Quindi, gli insiemi X ed Y sono DISGIUNTI.

N.B.: Per convenzione, diremo che $\emptyset \cap E = E \cap \emptyset = \emptyset$ per ogni insieme E vuoto o non vuoto.

DIFFERENZA INSIEMISTICA

Dati due insiemi A e B, la differenza insiemistica $A \setminus B$ ("A meno B") è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad A ma non appartengono a B. Si pone: $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus B = \emptyset$.

Esempio: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$. Si ha



$A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{4\}$ quindi in generale, $A \setminus B \neq B \setminus A$

Volendo fare una cosa "commutativa", si definisce differenza simmetrica di due insiemi A e B l'insieme $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Non è difficile vedere che $A \Delta B = B \Delta A$ per ogni coppia di insiemi (A, B): ciò è una conseguenza della proprietà commutativa dell'unione.

Nel nostro caso, si ha $A \Delta B = \{1, 4\}$.

OSSERVAZIONE: Notiamo che l'intersezione e l'unione godono delle seguenti due proprietà:

1) Commutativa: per ogni coppia di insiemi (A, B) si ha: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

2) associativa: comunque si prendano tre insiemi A, B, C si ha: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

INSIEME COMPLEMENTARE

Fissiamo un insieme "abbastanza grande", U, che sarà il nostro insieme "universo". Questo insieme, nella pratica, dipenderà dalla situazione che vogliamo analizzare e dal problema che si intende studiare e risolvere (per esempio, nel lancio di un dado non truccato, prenderemo $U=\{1,2,3,4,5,6\}$).

Dato un insieme $A\subset U$, si definisce <u>complementare di A</u> (rispetto a U) l'insieme degli elementi che non appartengono ad A (e che naturalmente appartengono ad U), cioè

L'INSIEME $U\setminus A$

che si può indicare anche con i simboli $\bar{A}$, oppure A^c, oppure $\complement A$, purché sia chiaro dal contesto che si sta facendo il complementare rispetto ad U.

<u>Esempio</u>: $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,2,3\}$.

si ha: $A^c=U\setminus A=\{2,4,6\}$, $B^c=U\setminus B=\{4,5,6\}$,

$A\cup B=\{1,2,3,5\}$, $A\cap B=\{1,3\}$, $A\setminus B=\{5\}$, $B\setminus A=\{2\}$,

$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\{2,5\}=B\Delta A$.

Partizione di un insieme

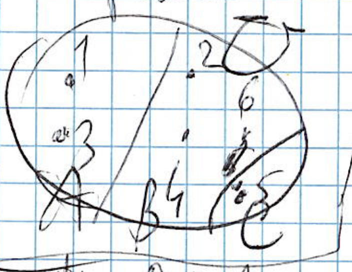
Una partizione di un insieme U è l'insieme formato da suoi sottoinsiemi che hanno le seguenti proprietà:

- nessuno di questi sottoinsiemi è vuoto;
- i sottoinsiemi sono a due a due disgiunti;
- l'unione di questi sottoinsiemi è uguale a tutto A.

Esempi: Sia $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, e siano $A=\{1,3\}$, $B=\{2,4,6\}$, $C=\{5\}$. Gli insiemi A, B e C costituiscono veramente una partizione di U, perché $A\cap B=B\cap C=A\cap C=\emptyset$, $A\cup B\cup C=U$ e inoltre nessuno dei tre insiemi è vuoto.

Siano $D=\{1,3,5,6\}$, $E=\{2,4\}$: anche gli insiemi D ed E costituiscono una partizione di U, perché $D\neq\emptyset$, $E\neq\emptyset$, $D\cap E=\emptyset$, $D\cup E=U$.

Invece gli insiemi $F=\{1,3,4\}$ e $G=\{2,5\}$ NON costituiscono una partizione di U, perché $F\cup G=\{1,2,3,4,5\}\neq U$.



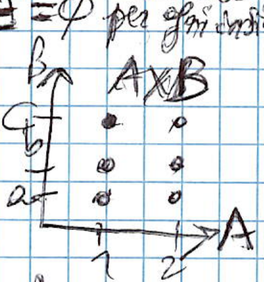
PRODOTTO CARTESIANO

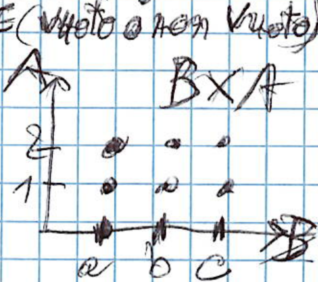
Il prodotto cartesiano di due insiemi non vuoti è l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate di cui il primo elemento appartiene al primo insieme e il secondo elemento appartiene al secondo insieme. Per convenzione, si pone: $E\times\emptyset=\emptyset\times E=\emptyset$ per ogni insieme E (vuoto o non vuoto).

Esempio: $A=\{1,2\}$ $B=\{a,b,c\}$

$A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

$B\times A=\{(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2)\}$





(Notiamo che, in generale, il prodotto cartesiano non è commutativo)

In generale, $A_1\times A_2\times\dots\times A_n=\{(a_1,a_2,\dots,a_n): a_1\in A_1,\dots, a_n\in A_n\}$ (ove n è un fissato numero intero, $n\geq 3$)

Operazioni con gli insiemi. Esercizi completi di soluzione guidata.

Operation with sets

1.

Trova l'insieme intersezione tra l'insieme delle note musicali e l'insieme degli articoli determinativi della lingua italiana.

soluzione

2.

Rappresenta per elencazione l'insieme unione formato dai primi cinque numeri pari maggiori di 1 e dai primi tre numeri dispari maggiori o uguali a 1.

soluzione

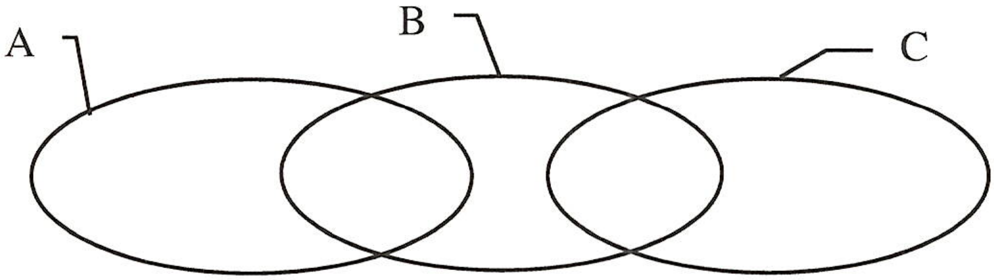
3.

L'insieme A è formato dai numeri interi maggiori di 1 e minori di 10 e l'insieme B è formato dai numeri pari compresi tra 3 e 9. Rappresenta per elencazione l'insieme differenza A-B.

soluzione

4.

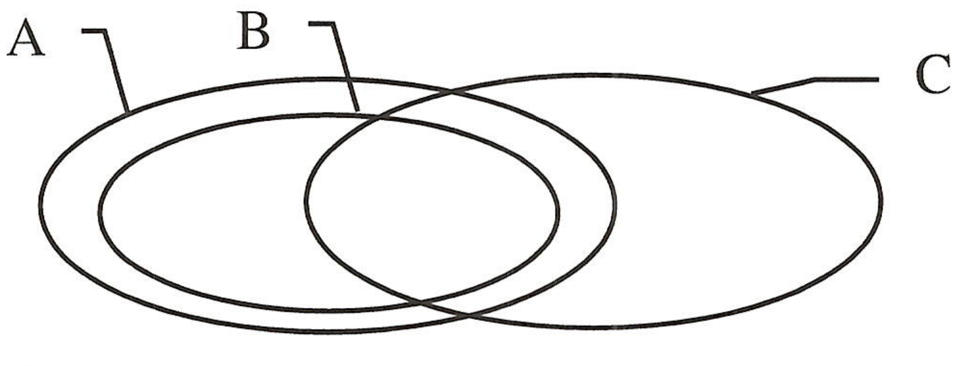
Data la seguente rappresentazione poni in evidenza $A \cap B$ con righe orizzontali e $B \cap C$ con righe verticali(con i diagrammi di Eulero-Venn o di Venn)



soluzione

5.

Data la seguente rappresentazione poni in evidenza $A \cap C$ con righe orizzontali e $B \cup C$ con righe verticali.



soluzione

6.

Dati gli insiemi A = {10, 20, 30}, B={20, 25, 30} e C={20, 30}, indica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

$A \cap B = \{20,30\}$		$B \subset A$	
$C \subset A$		$C \cap B = A \cap B$	
$A \subset B$		$A \cup B = \{10,20,25,30\}$	
$B \cup C = B$		$A \cap C = \{\varnothing\}$	

soluzione

7.

Dati gli insiemi A={1, 2 ,3 ,4}, B={3, 4, 5, 6}, C={3, 4, 7, 8} e D={7, 8, 9} rappresenta sia per elencazione, sia con diagrammi di Eulero-Venn le seguenti situazioni.

$A \cap B$ $A \cap C$ $B \cap C$ $B \cap D$

soluzione

8.

Dati gli insiemi A={1, 2 ,3 ,4}, B={3, 4, 5, 6}, C={3, 4, 7, 8} e D={7, 8, 9} rappresenta sia per elencazione sia con diagrammi di Eulero-Venn le seguenti situazioni.

$A \cup B$ $A \cup C$ $B \cup D$ $A \cap B \cap C$

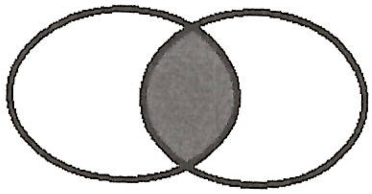
soluzione

Soluzioni

1. Trova l'insieme intersezione tra l'insieme delle note musicali e l'insieme degli articoli determinativi della lingua italiana.

$A = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$

$B = \{il, lo, la, gli, i, le\}$



$A \cap B = \{la\}$

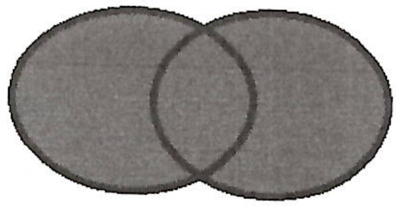
$|A \cap B| = 1$

N.B.: La notazione $|A|$ indica la cardinalità di A, cioè il numero degli elementi di A, se A è finito non vuoto; 0, se $A = \emptyset$.

2. Rappresenta per elencazione l'insieme unione formato dai primi cinque numeri pari maggiori di 1 e dai primi tre numeri dispari maggiori o uguali a 1.

$A = \{2,4,6,8,10\}$

$B = \{1,3,5\}$



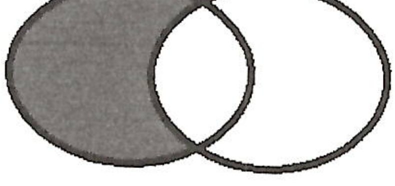
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8,10\}$

$|A \cup B| = 8$

3. L'insieme A è formato dai numeri interi maggiori di 1 e minori di 10 e l'insieme B è formato dai numeri pari compresi tra 3 e 9. Rappresenta per elencazione l'insieme differenza A-B.

$A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$

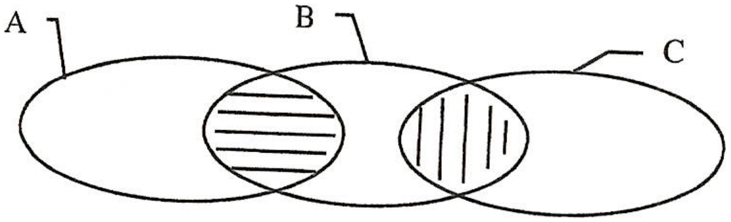
$B = \{4,6,8\}$



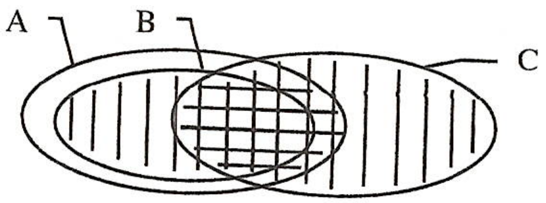
$A - B = \{2,3,5,7,9\}$

$|A - B| = 5$

4. Data la seguente rappresentazione poni in evidenza $A \cap B$ con righe orizzontali e $B \cap C$ con righe verticali. (con i diagrammi di Eulero-Venn o di Venn)



5. Data la seguente rappresentazione poni in evidenza $A \cap C$ con righe orizzontali e $B \cup C$ con righe verticali.



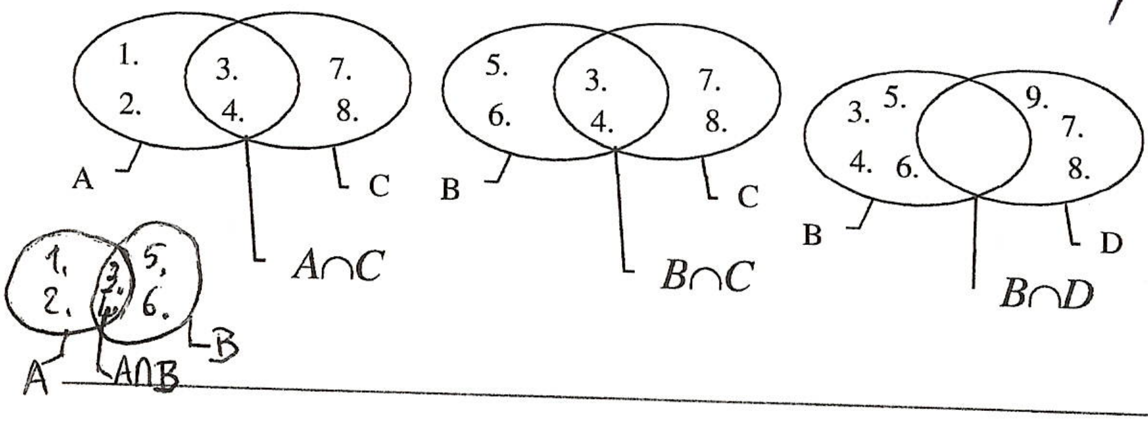
6. Dati gli insiemi A = {10, 20, 30}, B={20, 25, 30} e C={20, 30}, indica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

$A \cap B = \{20,30\}$	Vero	$B \subset A$ perché $25 \in B$ ma $25 \notin A$	Falso
$C \subset A$	Vero	$C \cap B = A \cap B = \{20,30\}$	Vero
$A \subset B$ perché $10 \in A$ ma $10 \notin B$	Falso	$A \cup B = \{10,20,25,30\}$	Vero
$B \cup C = B$	Vero	$A \cap C = \{\varnothing\}$	Falso

perché $A \cap C = \{20,30\}$.

7. Dati gli insiemi A={1, 2 ,3 ,4}, B={3, 4, 5, 6}, C={3, 4, 7, 8} e D={7, 8, 9} rappresenta sia per elencazione sia con diagrammi di Eulero-Venn le seguenti situazioni.

$A \cap B = \{3, 4\}$ $A \cap C = \{3, 4\}$ $B \cap C = \{3, 4\}$ $B \cap D = \emptyset$



8. Dati gli insiemi A={1, 2 ,3 ,4}, B={3, 4, 5, 6}, C={3, 4, 7, 8} e D={7, 8, 9} rappresenta sia per elencazione sia con diagrammi di Eulero-Venn le seguenti situazioni.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$ $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B \cup D = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ $A \cap B \cap C = \{3, 4\}$